ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 gennaio 1898.

Presidenza del Socio anziano A. Betocchi.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sulle macchie, facole e protuberanze solari osservate al R. Osservatorio del Collegio Romano nel 4° trimestre del 1897.* Nota del Socio P. Tacchini.

Ho l'onore di presentare all'Accademia i risultati delle osservazioni solari fatte durante il 4° trimestre del 1897. La stagione fu abbastanza favorevole specialmente per le osservazioni delle macchie e delle facole, i cui risultati sono compendiati nella seguente tabella.

1897

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Frequenza delle macchie	Frequenza dei fori	Frequenza delle M+F	Frequenza dei giorni senza M+F	Frequenza dei giorni con soli fori	Frequenza dei gruppi di macchie	Media estensione delle macchie	Media estensione delle facole
Ottobre . .	27	0,67	3,15	3,82	0,22	0,44	1,78	5,63	93,09
Novembre .	22	0,73	1,32	2,05	0,50	0,00	0,50	4,09	73,10
Dicembre. .	21	4,33	4,38	8,71	0,05	0,00	2,10	42,71	75,00
4° trimestre	70	1,79	2,94	4,73	0,26	0,17	1,47	16,27	80,79

Dopo il massimo secondario del mese di settembre sono assai notevoli i minimi delle macchie e fori solari nei mesi di ottobre e novembre, con

parecchie giornate senza macchie. Anche nella frequenza dei gruppi di macchie e loro estensione si verificò un minimo ragguardevole nel mese di novembre, così che per le macchie le medie di questo trimestre risultano assai inferiori a quelle del trimestre precedente. Nelle facole invece vi fu un aumento di estensione. Le osservazioni furono eseguite da me in 50 giornate e in 20 dal sig. Vezzani.

Per le protuberanze si ottennero i dati seguenti:

1897

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Medio numero delle protuberanze per giorno	Media altezza per giorno	Estensione media	Media delle massime altezze	Massima altezza osservata
Ottobre. . .	20	4,90	37″,7	1°,3	49″,4	100″
Novembre .	18	4,95	39,2	1,7	58,6	169
Dicembre. .	17	3,00	33.0	1.3	36,6	60
4° trimestre	55	4,33	36,8	1,5	48,5	169

In questo trimestre il fenomeno delle protuberanze solari presentò un leggero aumento, in modo inverso cioè di quanto avvenne per le macchie: però può dirsi che perdurò lo stato di stazionarietà accennato per questo fenomeno nella precedente Nota. Le osservazioni furono fatte da me in 42 giornate, e in 13 dall' assistente sig. prof. Palazzo.

Matematica. — *Ancora sull' estensione dei teoremi di Eulero e Meusnier agli iperspazii.* Nota di L. Berzolari, presentata dal Socio Beltrami.

In una Nota inserita nel fascicolo 10, 2° sem. 1897, dei Rendiconti di codesta illustre Accademia, ho mostrato come i teoremi di Eulero e Meusnier, relativi alla curvatura delle linee tracciate sopra una superficie dello spazio ordinario, si possono estendere ad una varietà di $n-1$ dimensioni, contenuta in uno spazio S_n di n dimensioni, considerando le sezioni fatte nella varietà con gli *iperpiani* passanti per un punto fisso di essa. Ora mi sono accorto che con gli stessi metodi di quella Nota si possono avere risultati notevolmente più generali, esaminando le sezioni prodotte nella data varietà da spazii lineari *aventi quante si vogliano dimensioni* e passanti pel punto fissato. Nei teoremi che così si ottengono son quindi compresi quelli della Nota precedente,

nonchè quelli notissimi, che furono stabiliti per la prima volta dal Kronecker (¹).

Circa l'estensione del teorema di Meusnier, con ragionamenti del tutto analoghi a quelli dei n. 2 e 3 della Nota citata, si conclude senz'altro:

Data in S_n *una varietà ad* $n-1$ *dimensioni e fissato su essa un punto* O, *si considerino le sezioni* (*ad* $r-1$ *dimensioni*) *fatte nella varietà con due spazii lineari di* r *dimensioni* ($r=2, 3, \ldots, n-1$), *passanti per* O, *l'uno obliquo e l'altro normale alla varietà, ma aventi la stessa traccia sull'iperpiano tangente in* O *alla varietà medesima: nel punto* O *la curvatura della sezione obliqua sarà uguale a quella della sezione normale, divisa per la* $(r-1)^{\text{ma}}$ *potenza del coseno dell'angolo compreso fra i due spazii secanti.*

Per ciò che concerne l'estensione del teorema di Eulero, poniamo — come nel n. 4 della Nota citata — l'origine delle coordinate nel punto considerato O, prendendo per iperpiano $x_n=0$ quello che è ivi tangente alla varietà e scegliendo gli altri iperpiani coordinati in modo che l'equazione dell'indicatrice contenga soltanto i quadrati delle coordinate: l'equazione della varietà assumerà così la forma:

$$2x_n = A_1 x_1^2 + \cdots + A_{n-1} x_{n-1}^2 + P\,. \tag{1}$$

Ora si conduca per la normale in O, cioè per l'asse Ox_n, uno spazio lineare qualunque S_r ad r dimensioni, e si cambino gl'iperpiani coordinati $x_1=0, \ldots, x_{n-1}=0$ in altri $y_1=0, \ldots, y_{n-1}=0$ colle formole

$$x_i = \gamma_i^{(1)} y_1 + \gamma_i^{(2)} y_2 + \cdots + \gamma_i^{(n-1)} y_{n-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1)\,, \tag{2}$$

in guisa che lo spazio S_r venga rappresentato dalle equazioni

$$y_r = y_{r+1} = \cdots = y_{n-1} = 0\,.$$

Sostituendo le espressioni (2) in (1), e ponendo

$$B_{ij} = A_1 \gamma_1^{(i)} \gamma_1^{(j)} + \cdots + A_{n-1} \gamma_{n-1}^{(i)} \gamma_{n-1}^{(j)} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, r-1)\,, \tag{3}$$

la curvatura che la sezione della varietà con S_r ha nel punto O, sarà data dal valore del determinante $|B_{ij}|$. Ponendo in questo, in luogo delle B, le

(¹) Kronecker, *Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln* (Monatsberichte der K. P. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1869, pag. 688). Cfr. pure Killing, *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* (Leipzig, 1885, § 11).

espressioni (3), ed osservando che nel determinante ortogonale — uguale all'unità positiva — formato coi coefficienti γ delle (2) ogni minore è uguale al proprio complemento algebrico, si trova:

$$(4) \qquad |B_{ij}| = \sum A_{h_1} A_{h_2} \dots A_{h_{r-1}} \begin{vmatrix} \gamma_{h_r}^{(r)} & \gamma_{h_r}^{(r+1)} & \dots & \gamma_{h_r}^{(n-1)} \\ \gamma_{h_{r+1}}^{(r)} & \gamma_{h_{r+1}}^{(r+1)} & \dots & \gamma_{h_{r+1}}^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{h_{n-1}}^{(r)} & \gamma_{h_{n-1}}^{(r+1)} & \dots & \gamma_{h_{n-1}}^{(n-1)} \end{vmatrix}^2 ,$$

dove $h_1 h_2 \dots h_{r-1}$ ed $h_r h_{r+1} \dots h_{n-1}$ sono due qualunque combinazioni fra loro complementari, formate con $r-1$ ed $n-r$ numeri della serie $1, 2, \dots, n-1$, e la somma comprende tutti gli $\binom{n-1}{r-1}$ termini che si ricavano da quello scritto considerando tutte le dette combinazioni.

Le $A_{h_1}, A_{h_2}, \dots, A_{h_{r-1}}$ sono le curvature principali della varietà, corrispondenti agli assi $x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_{r-1}}$ dell' indicatrice. Il quadrato che comparisce nella (4) come ultimo fattore ha pure un significato geometrico assai semplice, poichè da una formola dovuta al sig. Jordan [1] si deduce che esso equivale al prodotto dei quadrati dei coseni degli $n-r$ angoli formati dai due spazii lineari ad $n-r$ dimensioni determinati dagli assi $x_{h_r}, x_{h_{r+1}}, \dots, x_{h_{n-1}}$ e dagli assi $y_r, y_{r+1}, \dots y_{n-1}$. Il primo di tali spazii si può opportunamente chiamare uno *spazio principale* dell' indicatrice, il secondo è lo spazio normale in O al dato S_r. Introducendo gli spazii ad r dimensioni normali in O ai precedenti, ed applicando il teorema 2° dato dal sig. Jordan n. 48 del l. c., risulta infine:

La curvatura in O della sezione fatta nella data varietà con uno spazio lineare normale ad r dimensioni è uguale alla somma degli $\binom{n-1}{r-1}$ prodotti che si ottengono moltiplicando fra loro in tutti i modi possibili $r-1$ delle curvature principali ed i quadrati dei coseni degli angoli formati dallo spazio fissato e dallo spazio lineare normale ad r dimensioni, condotto per lo spazio principale (ad $r-1$ dimensioni) dell' indicatrice, al quale corrispondono le $r-1$ curvature principali considerate.

[1] Jordan, *Essai sur la géométrie à n dimensions* (Bulletin de la Société Math. de France, t. 3, 1875, n. 50).

Matematica. — *Sugli spazii a curvatura costante.* Nota del dott. Remigio Banal [1], presentata dal Socio Beltrami.

II.

La deformabilità dello spazio di Ricci.

§ 4. Lo studio della deformabilità dello spazio di Ricci deve attaccarsi ad alcune considerazioni che formano l'oggetto del 1° Capitolo del mio lavoro: *Sulle varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due eguali* (Annali di Matematica, 1896). In questo capitolo si dimostra come le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un elemento lineare a tre variabili indipendenti

$$\sum_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

appartenga ad una varietà a tre dimensioni a curvatura totale nulla, consistono in ciò:

1° che i simboli di Riemann ad esso relativi (che indicheremo ora con $\alpha_1^{(rs)}$) siano decomponibili secondo le equazioni:

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \alpha_1^{(rs)} = \mathrm{G}\alpha^{(r)}\alpha^{(s)} \qquad \left(\mathrm{G} = \sum_{rs} a_{rs}\,\alpha_1^{(rs)}\right)$$

2° che esista almeno un sistema di funzioni b_{rs} della forma

$$\text{(C)} \qquad b_{rs} = e\beta_r\beta_s + g\gamma_r\gamma_s$$

le quali soddisfacciano ad un tempo alle equazioni algebriche:

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \sum_r \alpha^{(r)}\beta_r = \sum_r \alpha^{(r)}\gamma_r = \sum_r \beta^{(r)}\gamma_r = 0 \\ \sum_r \alpha^{(r)}\alpha_r = \sum_r \beta^{(r)}\beta_r = \sum_r \gamma^{(r)}\gamma_r = 1 \end{cases}$$

$$\text{(E)} \qquad e\,.\,g = \mathrm{G}$$

e alle equazioni fondamentali (B).

Ed è opportuno ricordare come alle (D) equivalgano le

$$\text{(D}'\text{)} \qquad a_{rs} = \alpha_r\,\alpha_s + \beta_r\beta_s + \gamma_r\gamma_s$$

e come le funzioni e, g rappresentino, cambiato il segno, le due curvature principali non nulle della varietà considerata.

Ora si riprenda l'elemento lineare dello spazio di Ricci sotto la forma

$$\text{(3)} \qquad ds^2 = d\alpha^2 + \frac{1}{c^2}\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\chi^2\right).$$

[1] V. fascicolo precedente.

Per miglior ordine di trattazione verifichiamo, quantunque possa sembrar superfluo, come per quest' elemento lineare le condizioni precedenti siano soddisfatte. Dal calcolo diretto dei simboli di Christoffel e di Riemann, fatte corrispondere le variabili α, θ, χ rispettivamente alle variabili x_1, x_2, x_3 delle formole generali (5), (6) (1) risulta che i primi sono tutti nulli, tranne

$$a_{32,3} = - a_{33,2} = \frac{1}{c^2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta ,$$

e conseguentemente sono nulli anche i secondi, salvo

$$\alpha_1^{(11)} = c^2 .$$

Si riconosce allora subito che anzitutto sono soddisfatte le condizioni (A′), e si riscontra nello stesso tempo l'identità delle funzioni $\alpha^{(r)}$ (e quindi delle α_r (2)) con le derivate prime della variabile α.

§ 5. Quanto alla seconda parte, un sistema di funzioni b_{rs} della forma richiesta si deduce, unico e determinato, dalle (D′) ed (E) stesse, quando si abbia

$$e = g$$

ed è:

$$b_{rs} = c(\alpha_{rs} - \alpha_r \alpha_s) . \tag{8}$$

Un tale sistema soddisfa alle equazioni fondamentali

$$b_{rst} = b_{rts} ;$$

infatti coi metodi del calcolo differenziale assoluto da esso abbiamo

$$b_{rst} = c(\alpha_{rst} - \alpha_r \alpha_{st} - \alpha_s \alpha_{rt}) ,$$

e queste b_{rst} sono nulle, poichè sono nulle tanto le a_{rst}, come è noto, come le α_{rs} date dalle formole

$$\alpha_{rs} = \frac{d^2\alpha}{dx_r\, dx_s} - \sum_p \alpha^{(p)}\, a_{rs,p} ,$$

(1) Si ha con ciò:

$$a_{11} = 1 ; \quad a_{22} = \frac{1}{c^2} ; \quad a_{33} = \frac{1}{c^2} \operatorname{sen}^2\theta$$

$$|a| = \frac{1}{c^4} \operatorname{sen}^2\theta$$

$$a^{(11)} = 1 ; \quad a^{(22)} = c^2 ; \quad a^{(33)} = \frac{c^2}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$a_{rs} = a^{(rs)} = 0 \quad \text{per } r \gtrless s .$$

(2) Si ha infatti $\alpha^{(1)} = 1$; $\alpha^{(2)} = \alpha^{(3)} = 0$, e per le

$$\alpha_r = \sum_s a_{rs}\, \alpha^{(s)}$$

si ha parimenti $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Confronta per questi e per gli altri sviluppi di calcolo differenziale assoluto, che seguiranno, il *Résumé de quelques travaux,* ecc. già citato.

dalle quali risulta

$$\alpha_{rs} = - a_{rs,1} = 0 .$$

Ora a tale sistema di funzioni corrisponde una speciale configurazione (unica) dello spazio di Ricci, nella quale si conservano eguali e costanti in tutti i punti le due curvature principali diverse da zero. Essa costituisce una superficie molto notevole, della quale non si saprebbe indicare l'analoga nella geometria a due dimensioni; superficie intermedia in certo modo fra la sfera (che ha in ogni punto le tre curvature principali eguali e costanti) e il cilindro a tre dimensioni (che ha in ogni punto due curvature nulle e costante la terza), ma essenzialmente diversa dall'una e dall'altro, come è facile dedurre dalle considerazioni del § 2. Di essa è fatto qualche cenno nel mio lavoro più volte citato.

§ 6. Il problema di cui ci occupiamo si riduce analiticamente a questo: riconoscere se, oltre a quello definito dalle (8) esistano altri sistemi di funzioni b_{rs} della forma (C) che soddisfacciano alle equazioni (B), (D), (E), e in caso affermativo procedere alla loro determinazione.

Cominciamo a tal uopo dal notare come, avendosi dalle due prime delle equazioni algebriche (D), per una osservazione fatta nel paragrafo precedente:

$$\beta_1 = \gamma_1 = 0 \tag{9}$$

le (C) forniscano

$$b_{11} = b_{12} = b_{13} = 0 \tag{10}$$

cosicchè risultano fin d'ora determinate tre delle sei funzioni b_{rs}. Per le (9), quelle fra le rimanenti equazioni (D), che non sono identità, si riducono alle seguenti:

$$\begin{cases} \beta^{(2)}\,\gamma_2 + \beta^{(3)}\,\gamma_3 = 0 \\ \beta^{(2)}\,\beta_2 + \beta^{(3)}\,\beta_3 = 1 \\ \gamma^{(2)}\,\gamma_2 + \gamma^{(3)}\,\gamma_3 = 1 \end{cases}$$

le quali, con le sostituzioni indicate dalle

$$\beta^{(r)} = \sum\nolimits_r a^{(rs)}\,\beta_s \ , \ \gamma^{(r)} = \sum\nolimits_s a^{(rs)}\,\gamma_s$$

posti per le $a^{(rs)}$ gli elementi del sistema reciproco a quello dei coefficienti dell'elemento lineare (3), prendono la forma:

$$\begin{cases} \beta_2\,\gamma_2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta + \beta_3\,\gamma_3 = 0 \\ \beta_2^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta + \beta_3^2 = \dfrac{1}{c^2} \operatorname{sen}^2\theta \\ \gamma_2^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta + \gamma_3^2 = \dfrac{1}{c^2} \operatorname{sen}^2\theta \end{cases} \tag{D$_1$}$$

e queste equivalgono alle

$$(\mathrm{D}'_1)\qquad\left\{\begin{aligned}&\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0\\&\beta_2^2+\gamma_2^2=\frac{1}{c^2}\\&\beta_3^2+\gamma_3^2=\frac{1}{c^2}\operatorname{sen}^2\theta\end{aligned}\right.$$

che si deducono direttamente dalle (D').

Un' altra delle funzioni b_{rs} può determinarsi nel modo seguente: dai prodotti membro a membro delle due ultime equazioni (D'₁) togliamo rispettivamente i quadrati dei due membri della prima. Abbiamo:

$$\beta_2^2\gamma_3^2+\beta_3^2\gamma_2^2-2\beta_2\beta_3\gamma_2\gamma_3=\frac{1}{c^4}\operatorname{sen}^2\theta\,.$$

Se al primo membro di questa equazione, moltiplicata per $e.g$ aggiungiamo e togliamo i termini

$$e^2\beta_2^2\beta_3^2\ ,\ g^2\gamma_2^2\gamma_3^2$$

la potremo scrivere come segue:

$$(e\beta_2^2+g\gamma_2^2)(e\beta_3^2+g\gamma_3^2)-(e\beta_2\beta_3+g\gamma_2\gamma_3)^2=c^2\cdot\frac{1}{c^4}\operatorname{sen}^2\theta$$

o per le (C)

$$\frac{b_{22}\,b_{33}-b_{23}^2}{|a|}=c^2\,. \tag{11}$$

Le funzioni incognite del nostro problema si riducono dunque a due distinte, per le quali si possono assumere tanto due delle b_{22}, b_{33}, b_{23} quanto p. es. e, β_2 essendo possibile determinare algebricamente, per mezzo delle (C), (E), (D'₁), ciascuna delle due prime funzioni per mezzo delle altre due, e reciprocamente, salvo qualche incertezza di segno, che non porta nessuna alterazione nella forma delle equazioni differenziali (B) da cui dipendono le funzioni incognite stesse.

Trasformiamo ora tali equazioni differenziali riferendoci all'elemento lineare (3) e tenendo conto delle (10). Esse sono in numero di nove, di cui, nel caso generale, otto sole sono distinte, e cioè

$$b_{112}=b_{121}\ ;\ b_{113}=b_{131}\ ;\ b_{221}=b_{212}\ ;\ b_{223}=b_{232}\ ;\ b_{331}=b_{313}\ ;\ b_{332}=b_{323}$$
$$b_{123}=b_{132}\ ;\ b_{231}=b_{213}.$$

Per calcolare le diverse funzioni b_{rst} partiamoci dalle (7) e teniamo conto dei valori particolari già riportati, che assumono nel nostro caso le $a^{(rs)}$

e le $a_{rs,t}$. Avremo:

$$b_{rst} = \frac{db_{rs}}{dx_t} - c^2 (a_{rt,2}\, b_{s2} + a_{st,2}\, b_{r2}) - \frac{c^2}{\operatorname{sen}^2\theta} (a_{rt,3}\, b_{s3} + a_{st,3}\, b_{r3})$$

$$(x_t = \alpha\,,\theta\,,\chi \text{ per } t = 1\,,2\,,3)\,.$$

Da questa formola deduciamo subito che, fra le b_{rst}, che a noi importa calcolare, sono nulle le seguenti:

$$b_{112}\;,\; b_{113}\;,\; b_{121}\;,\; b_{131}\;,\; b_{212}\;,\; b_{313}\;,\; b_{123}\;,\; b_{132}\,.$$

Le altre assumono la forma:

$$b_{221} = \frac{db_{22}}{d\alpha}\;,\; b_{331} = \frac{db_{33}}{d\alpha}\;,\; b_{231} = \frac{db_{23}}{d\alpha}\;,$$

$$b_{223} = \frac{db_{22}}{d\chi} - 2b_{23}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\;,$$

$$b_{332} = \frac{db_{33}}{d\theta} - 2b_{33}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\;,$$

$$b_{232} = \frac{db_{23}}{d\theta} - b_{23}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\;,$$

$$b_{323} = \frac{db_{23}}{d\chi} + b_{22}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - b_{33}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,.$$

Perciò quelle fra le equazioni differenziali (B), che non risultano identità, si trasformano come segue:

$$\text{(B}')\qquad \frac{db_{22}}{d\alpha} = \frac{db_{33}}{d\alpha} = \frac{db_{23}}{d\alpha} = 0$$

$$\text{(B}'')\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{db_{22}}{d\chi} - \frac{db_{23}}{d\theta} = b_{23}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \\ &\frac{db_{33}}{d\theta} - \frac{db_{23}}{d\chi} = b_{22}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + b_{33}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \end{aligned} \right.$$

Possiamo adunque concludere che:

Quattro dei sei coefficienti della seconda forma fondamentale relativa allo spazio di Ricci, sono determinati dalle equazioni algebriche (10), (11). *Gli altri due devono soddisfare ad un sistema di equazioni differenziali, che si ottiene eliminando per mezzo della* (11) *uno dei tre coefficienti* $b_{22}\,, b_{33}\,, b_{23}$ *nelle* (B′) *e* (B″).

§ 7. Rimarrebbe da procedere a tale eliminazione, e da completare eventualmente il sistema d'equazioni differenziali risultante, con quelle che espri-

mono le condizioni di integrabilità delle funzioni incognite rimaste; ma possiamo giungere a conclusioni definitive per il nostro problema senza altri calcoli, osservando anzitutto che quelli fra i coefficienti b_{rs} che rimangono da calcolare, sono, per le (B′) funzioni soltanto delle variabili θ e χ; si constata inoltre facilmente che le equazioni (11), (B″) cui devono soddisfare, non sono altro che rispettivamente le equazioni di Gauss e di Codazzi relative all' elemento lineare

$$\frac{1}{c^2}(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\chi^2)$$

cioè alla sfera a due dimensioni di raggio $\frac{1}{c}$ dello spazio euclideo.

Abbiamo dunque dimostrato che:

Lo spazio di Ricci è deformabile. Il problema di determinare tutte le varietà a tre dimensioni applicabili su di esso, equivale analiticamente a quello della deformazione della sfera, in quanto che ogni seconda forma fondamentale di una sfera di dato raggio è altresì seconda forma fondamentale dello spazio di Ricci di egual raggio e viceversa.

Geometricamente, per ogni superficie a curvatura costante positiva dello spazio euclideo è possibile costruire una varietà a tre dimensioni applicabile sullo spazio di Ricci, e reciprocamente nota una di tali varietà se ne può dedurre una superficie a due dimensioni applicabile sulla sfera.

§ 8. Possiamo estendere il risultato ora ottenuto ad una classe più larga di superficie a tre dimensioni studiata nella mia Memoria più volte citata. Sono quelle a cui appartengono le seguenti forme caratteristiche dell' elemento lineare:

$$ds^2 = d\alpha^2 + k_1^2\,\alpha^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\chi^2) \tag{12}$$

$$ds^2 = k_1^2\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1-k_1}}$$

dove k_1 è una costante in valore assoluto sempre minore di 1. Tali varietà sono a curvatura totale nulla e a curvatura di Gauss positiva data da

$$G = \frac{k^2}{\alpha^2}$$

ovvero

$$G = \frac{k^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{k_1}},$$

le costanti k, k_1 essendo legate dalla relazione

$$k_1^2 = \frac{1}{1+k^2};$$

esse ammettono come superficie limite per $k_1 = \pm 1$ lo spazio euclideo.

Riferendoci alla forma (12) dell' elemento lineare ed effettuando il calcolo dei simboli di Christoffel e di Riemann, si trova che fra i primi sono diversi da zero soltanto i seguenti:

$$a_{12,2} = - a_{22,1} = k_1^2 \alpha$$
$$a_{13,3} = - a_{33,1} = k_1^2 \alpha \operatorname{sen}^2\theta$$
$$a_{23,3} = - a_{33,2} = k_1^2 \alpha^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta;$$

così pure i secondi sono tutti nulli, tranne

$$\alpha_1^{(11)} = \frac{k^2}{\alpha^2}.$$

Anche per queste superficie sono adunque soddisfatte le condizioni (A′) del § 4, ed è constatata l' identità delle funzioni $\alpha^{(r)}$ (e quindi anche delle α_r) con le derivate della variabile α.

Considerazioni affatto analoghe a quelle del § 5 dimostrano inoltre che un sistema di coefficienti per la seconda forma fondamentale delle varietà considerate è il seguente:

$$b_{rs} = \frac{k}{\alpha}(a_{rs} - \alpha_r \alpha_s)$$

e a tale sistema corrisponde per ognuna di esse una speciale configurazione (1), nella quale le due curvature diverse da zero sono eguali ed hanno per valore comune

$$-\frac{k}{\alpha}.$$

Volendo determinare tutti i sistemi di coefficienti della forma (C) che soddisfanno alle (D) o (D′), alla (E) e alle (B), posti dappertutto per le a_{rs} i coefficienti dell' elemento lineare (12), osserveremo anche qui come, avendosi dalle (D′)

$$\beta_1 = \gamma_1 = 0$$

risulti:

$$b_{11} = b_{12} = b_{13} = 0\,, \tag{13}$$

e le (D″) si riducano alle seguenti:

$$\beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0$$
$$\beta_2^2 + \gamma_2^2 = k_1^2 \alpha^2$$
$$\beta_3^2 + \gamma_3^2 = k_1^2 \alpha^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

dalle quali, come nel § 6, possiamo trarre

$$\frac{b_{22}\, b_{33} - b_{23}^2}{|a|} = \frac{k^2}{\alpha^2}. \tag{14}$$

(1) Per maggiori dettagli in proposito vedasi il cap. 2° della mia Memoria già citata.

Per calcolare quelle tra le funzioni b_{rst} che compaiono nelle equazioni fondamentali (B), ricorreremo alla formola:

$$b_{rst} = \frac{db_{rs}}{dx_t} - \frac{1}{k_1^2\,\alpha^2}(a_{rt,2}\,b_{s2} + a_{st,2}\,b_{r2}) - \frac{1}{k_1^2\,\alpha^2\,\mathrm{sen}^2\theta}(a_{rt,3}\,b_{s3} + a_{st,3}\,b_{r3})$$

$$(x_t = \alpha\,,\,\theta\,,\,\chi \text{ per } t = 1\,,2\,,3)$$

e troveremo:

$$b_{112} = b_{113} = b_{121} = b_{131} = 0$$

$$b_{212} = -\frac{b_{22}}{\alpha}\;;\; b_{313} = -\frac{b_{33}}{\alpha}\;;\; b_{123} = b_{132} = -\frac{b_{23}}{\alpha}$$

$$b_{221} = \frac{db_{22}}{d\alpha} - \frac{2b_{22}}{\alpha}\;;\; b_{331} = \frac{db_{33}}{d\alpha} - \frac{2b_{33}}{\alpha}\;;\; b_{231} = \frac{db_{23}}{d\alpha} - \frac{2b_{23}}{\alpha}$$

$$b_{223} = \frac{db_{22}}{d\chi} - 2b_{23}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\;;\; b_{332} = \frac{db_{33}}{d\theta} - 2b_{33}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$b_{232} = \frac{db_{23}}{d\theta} - b_{23}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$b_{323} = \frac{db_{23}}{d\chi} + b_{22}\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta - b_{33}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\,.$$

Perciò le equazioni fondamentali stesse si riducono alle seguenti:

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{db_{22}}{d\alpha} &= \frac{b_{22}}{\alpha}\\ \frac{db_{33}}{d\alpha} &= \frac{b_{33}}{\alpha}\\ \frac{db_{23}}{d\alpha} &= \frac{b_{23}}{\alpha}\end{aligned}\right.$$

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{db_{22}}{d\chi} - \frac{db_{23}}{d\theta} &= b_{23}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\\ \frac{db_{33}}{} - \frac{db_{23}}{d\chi} &= b_{22}\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta + b_{23}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\,.\end{aligned}\right.$$

Quindi abbiamo dimostrato che il teorema del § 6 può estendersi alle varietà d'elemento lineare (12) sostituite alle equazioni differenziali (B′) (B″) le equazioni (15) (16), dalle quali solo le prime sono formalmente diverse dalle corrispondenti (B′). Esse si integrano tuttavia facilmente e danno:

$$b_{22} = \alpha f_{22}(\theta\,,\chi)\;;\; b_{23} = \alpha f_{23}(\theta\,,\chi)\;;\; b_{33} = \alpha f_{33}(\theta\,,\chi)\,,$$

$f_{22}\,,f_{23}\,,f_{33}$ indicando tre funzioni di $\theta\,,\chi$ soltanto.

Sostituite le precedenti nell'equazione (14) otteniamo:

$$\frac{f_{22}\,f_{33} - f_{23}^2}{\left(\frac{1}{1+k^2}\right)^2\mathrm{sen}^2\theta} = k^2\,.$$

Con le posizioni:

$$f_{22}(\theta,\chi)=\frac{k^2}{1+k^2}b'_{22}\ ;\ f_{23}(\theta,\chi)=\frac{k^2}{1+k^2}b'_{23}\ ;\ f_{33}(\theta,\chi)=\frac{k^2}{1+k^2}b'_{33}$$

questa equazione si riduce alla forma:

$$(14')\qquad \frac{b'_{22}b'_{33}-b'^2_{23}}{\frac{1}{k^4}\operatorname{sen}^2\theta}=k^2$$

mentre le (16) formalmente non mutano, dando:

$$(16')\qquad \begin{cases} \dfrac{db'_{22}}{d\chi}-\dfrac{db'_{23}}{d\theta}=b'_{23}\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \\ \dfrac{db'_{33}}{d\theta}-\dfrac{db'_{23}}{d\chi}=b'_{22}\cos\theta\operatorname{sen}\theta+b'_{23}\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \end{cases}$$

Le (14'), (16') sono rispettivamente le equazioni di Gauss e di Codazzi che, nello spazio euclideo appartengono alla superficie a due dimensioni:

$$\frac{1}{k^2}(d\theta^2+\operatorname{sen}^2\theta\, d\chi^2)$$

cioè alla sfera di raggio $\frac{1}{k}$. Potremo dunque concludere:

Le varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due eguali sono deformabili. Il problema di determinare tutte le varietà applicabili su una delle date, di curvatura $\frac{k}{\alpha}$, *coincide analiticamente con quello della deformazione della sfera di raggio* $\frac{1}{k}$, *in quanto che per ogni sistema* $b'_{22}, b'_{23}, b'_{33}$ *di coefficienti della seconda forma fondamentale di questa è noto, dalle equazioni* (13) *e dalle*

$$b_{22}=\alpha\frac{k^2}{1+k^2}b'_{22}\ ;\ b_{23}=\alpha\frac{k^2}{1+k^2}b'_{23}\ ;\ b_{33}=\alpha\frac{k^2}{1+k^2}b'_{33}\ \text{(1)},$$

un sistema di coefficienti b_{rs} *per la seconda forma fondamentale della prima, e viceversa.*

Segue anche qui la possibilità della determinazione geometrica di una delle configurazioni delle varietà studiate per ognuna delle superficie a due dimensioni applicabili sulla sfera, e quella della determinazione inversa.

Quale interesse il ravvicinamento di questi due problemi possa avere per entrambi sarà studiato in altro lavoro.

(1) A queste equivalgono le

$$b_{22}=\alpha(1-k^2_1)b'_{22}\ ;\ b_{23}=\alpha(1-k^2_1)b'_{23}\ ;\ b_{33}=\alpha(1-k^2_1)b'_{33}.$$

Matematica. — *Sul teorema di moltiplicazione delle operazioni funzionali distributive a determinazione unica.* Nota del prof. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Sia A simbolo di operazione funzionale, e per tutte le funzioni analitiche $\varphi(x)$ tali che la funzione A $(\varphi(x))$ sia ancora analitica ed abbia un campo comune di convergenza con la φ, si abbia una regola di moltiplicazione espressa dalla formula:

$$\mathrm{A}(\varphi\psi)=\sum_{r=0}^{p}\sum_{s=0}^{r}\sum_{n=0}^{p}\sum_{m=0}^{n} a_{r.s}^{n.m}\,\varphi^{r-s}\psi^{n-m}\,\overline{\mathrm{A}(\varphi)}^{s}\,\overline{\mathrm{A}(\psi)}^{m}\,. \tag{1}$$

I coefficienti $a_{r.s}^{n.m}$ potranno essere supposti numericamente costanti, od anche funzioni analitiche della x convergenti in un campo comune con le φ, ψ, $\mathrm{A}(\varphi)$, $\mathrm{A}(\psi)$.

Ordinando rispetto alla φ, si ha dalla (1):

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{A}(\varphi\psi)= {} & a_{0.0}^{0.0}+a_{0.0}^{1.0}\psi+a_{0.0}^{1.1}\mathrm{A}(\psi)+a_{0.0}^{2.0}\psi^2+a_{0.0}^{2.1}\psi\mathrm{A}(\psi)+a_{0.0}^{2.2}\overline{\mathrm{A}(\psi)}^2+\cdots \quad + \\ & +\left(a_{1.0}^{0.0}+a_{1.0}^{1.0}\psi+a_{1.0}^{1.1}\mathrm{A}(\psi)+a_{1.0}^{2.0}\psi^2+a_{1.0}^{2.1}\psi\mathrm{A}(\psi)+a_{1.0}^{2.2}\overline{\mathrm{A}(\psi)}^2+\cdots\right)\quad\varphi+ \\ & +\left(a_{1.1}^{0.0}+a_{1.1}^{1.0}\psi+a_{1.1}^{1.1}\mathrm{A}(\psi)+a_{1.1}^{2.0}\psi^2+a_{1.1}^{2.1}\psi\mathrm{A}(\psi)+a_{1.1}^{2.2}\overline{\mathrm{A}(\psi)}^2+\cdots\right)\mathrm{A}(\varphi)+\cdots \\ & +\cdots\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Se conveniamo di scrivere

$$\mathrm{A}(1)=\xi\,; \tag{3}$$

avremo, per $\psi=1$,

$$\mathrm{A}(\varphi)=\sum_{r=0}^{p}\sum_{s=0}^{r}\left(a_{r.s}^{0.0}+a_{r.s}^{1.0}+a_{r.s}^{1.1}\xi+a_{r.s}^{2.0}+a_{r.s}^{2.1}\xi+a_{r.s}^{2.2}\xi^2+\cdots\right). \tag{4}$$

Ora, a meno che la operazione $\mathrm{A}(\varphi)$ non si riduca ad un polinomio intero nella φ a coefficienti funzionali fissi, dovrà aversi identicamente:

$$a_{1.1}^{0.0}+a_{1.1}^{1.0}+a_{1.1}^{1.1}\xi+a_{1.1}^{2.0}+a_{1.1}^{2.1}\xi+a_{1.1}^{2.2}\xi^2+a_{1.1}^{3.0}+\cdots=1\,, \tag{5}$$

e, per ogni altra combinazione degli indici r ed s,

$$a_{r.s}^{0.0}+a_{r.s}^{1.0}+a_{r.s}^{1.1}\xi+a_{r.s}^{2.0}+a_{r.s}^{2.1}\xi+a_{r.s}^{2.2}\xi^2+a_{r.s}^{3.0}+\cdots=0\,. \tag{6}$$

Dovendosi inoltre avere identicamente:

$$A(\varphi\psi) = A(\psi\varphi)\,,$$

saranno eguali i coefficienti dei termini

$$\varphi^{r-s}\,\overline{A(\varphi)}^{\,s}\,\psi^{n-m}\,\overline{A(\psi)}^{\,m}\,,\quad \varphi^{n-m}\,\overline{A(\varphi)}^{\,m}\,\psi^{r-s}\,\overline{A(\psi)}^{\,s}$$

e cioè

$$a^{n.m}_{r.s} = a^{r.s}_{n.m} \tag{7}$$

Ciò esprime che *sono eguali a due a due quei coefficienti che si ottengono l'uno dall'altro scambiando gli indici superiori con gli inferiori.*

Supponiamo ora che *la operazione* A *sia distributiva ed a determinazione unica.*

Anzitutto, dovendo aversi a identicamente $A(\varphi\psi) = 0$ ognivolta che sia la φ che la ψ sono eguali allo zero, dovranno esser nulli tutti i termini che non contengono insieme uno almeno dei fattori φ, $A(\varphi)$, ed uno dei fattori ψ, $A(\psi)$.

Si avrà cioè identicamente:

$$a^{0.0}_{r.s} = a^{n.m}_{0.0} = 0\,. \tag{8}$$

Così delle identità (5) e (6) verrà a mancare quella corrispondente alla combinazione $r = s = 0$, e tutte le altre perderanno il primo termine.

Di più, dovendo aversi, per qualunque costante numerica m, e per qualunque funzione φ, la identità:

$$A(m\varphi) - mA(\varphi) = 0 \tag{9}$$

si avranno, contemporaneamente, le identità:

$$\left\{\begin{aligned} & m(a^{1.0}_{1.1} - 1) + ma^{1.1}_{1.1}\,\xi + m^2 a^{2.0}_{1.1} + m^2 a^{2.1}_{1.1}\,\xi + m^2 a^{2.2}_{1.1}\,\xi^2 + m^3 a^{3.0}_{1.1} + \\ & \qquad\qquad + m^3 a^{3.1}_{1.1}\,\xi + \cdots = 0 \\ & ma^{1.0}_{r.s} \qquad + ma^{1.1}_{r.s}\,\xi + m^2 a^{2.0}_{r.s} + m^2 a^{2.1}_{r.s}\,\xi + m^2 a^{2.2}_{r.s}\,\xi^2 + m^3 a^{3.0}_{r.s} + \\ & \qquad\qquad + m^3 a^{3.1}_{1.1}\,\xi + \cdots = 0, \end{aligned}\right.$$

che potranno anche scriversi:

$$\left\{\begin{aligned} & m(a^{1.0}_{1.1} - 1 + a_{1.1}\,\xi) + m^2(a^{2.0}_{1.1} + a^{2.1}_{1.1}\,\xi + a^{2.2}_{1.1}\,\xi^2) + \\ & \qquad\qquad + m^3(a^{3.0}_{1.1} + a^{3.1}_{1.1}\,\xi + a^{3.2}_{1.1}\,\xi^2 + a^{3.3}_{1.1}\,\xi^3) + \cdots = 0 \\ & m(a^{1.0}_{r.s} \qquad + a_{r.s}\,\xi) + m^2(a^{2.0}_{r.s} + a^{2.1}_{r.s}\,\xi + a^{2.2}_{r.s}\,\xi^2) + \\ & \qquad\qquad + m^3(a^{3.0}_{1.1} + a^{3.1}_{1.1}\,\xi + a^{3.2}_{1.1}\,\xi^2 + a^{3.3}_{1.1}\,\xi^3) + \cdots = 0. \end{aligned}\right.$$

E, queste dovendo essere soddisfatte indipendentemente dal valor numerico di m, avremo singolarmente:

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{1.1}^{1.0} - 1 + a_{1.1}^{1.0}\,\xi = 0\,, \quad a_{1.1}^{2.0} + a_{1.1}^{2.1}\,\xi + a_{1.1}^{2.2}\,\xi^2 = 0\,, \\ \qquad a_{1.1}^{3.0} + a_{1.1}^{3.1}\,\xi + a_{1.1}^{3.2}\,\xi^2 + a_{1.1}^{3.3}\,\xi^3 = 0\,, \ldots \\ a_{r.s}^{1.0} \qquad + a_{r.s}^{1.0}\,\xi = 0\,, \quad a_{r.s}^{2.0} + a_{r.s}^{2.1}\,\xi + a_{r.s}^{2.2}\,\xi^2 = 0\,, \\ \qquad a_{r.s}^{3.0} + a_{r.s}^{3.1}\,\xi + a_{r.s}^{3.2}\,\xi^2 + a_{r.s}^{3.3}\,\xi^3 = 0 \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Queste identità ci permettono di modificare la espressione di $A(\varphi\psi)$.

Da quelle che sono del primo grado in ξ, si ricava

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{1.1}^{1.1} = -\dfrac{1}{\xi}\,(a_{1.1}^{1.0} - 1)\,, \\ a_{r.s}^{1.1} = -\dfrac{1}{\xi}\; a_{r.s}^{1.0}\,. \end{array}\right.$$

Le espressioni del primo grado in ψ ed $A(\psi)$ che si trovano in $A(\varphi\psi)$ si modificano perciò nel modo seguente:

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{1.1}^{1.0}\,\psi + a_{1.1}^{1.1}\,A(\psi) = a_{1.1}^{1.0}\left(\psi - \dfrac{1}{\xi}\,A(\psi)\right) + \dfrac{1}{\xi}\,A(\psi) \\ a_{r.s}^{1.0}\,\psi + a_{r.s}^{1.1}\,A(\psi) = a_{r.s}^{1.0}\left(\psi - \dfrac{1}{\xi}\,A(\psi)\right). \end{array}\right.$$

Si osservi poi che il trinomio del secondo grado $a_{r.s}^{2.0} + a_{r.s}^{2.1}\,\xi + a_{r.s}^{2.2}\,\xi^2$ dovendo esser zero per quello stesso valore della ξ che annulla il binomio $a_{r.s}^{1.0} + a_{r.s}^{1.1}\,\xi$; il trinomio $a_{r.s}^{2.0}\,\psi^2 + a_{r.s}^{2.1}\,\psi A(\psi) + a_{r.s}^{2.2}\,\overline{A(\psi)}^2$, deve essere esattamente divisibile per il binomio $a_{r.s}^{1.0}\,\psi + a_{r.s}^{1.1}\,A(\varphi)$; e cioè, ricordando le (12), avremo:

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{r.s}^{2.0}\,\psi^2 + a_{r.s}^{2.1}\,\psi A(\psi) + a_{r.s}^{2.2}\,\overline{A(\psi)}^2 = a_{r.s}^{2.0}\left(\psi - \dfrac{1}{\xi}\,A(\psi)\right)\left(\psi + b_{r.s}^{2.2}\,A(\psi)\right) \\ \qquad b_{r.s}^{2.2} = \dfrac{a_{r.s}^{2.0}\,\dfrac{1}{\xi} + a_{r.s}^{2.1}}{a_{r.s}^{2.0}} = \dfrac{a_{r.s}^{2.2}}{a_{r.s}^{2.0}}\,\xi\,. \end{array}\right.$$

Il caso di $r=s=1$, qui si riduce alla regola comune; anzi a quello di $r=1$, $s=0$, osservando che, in forza delle (7) ed (11), si ha:

$$a_{1.1}^{2.0}:a_{1.0}^{2.0}=a_{1.1}^{2.1}:a_{1.0}^{2.1}=a_{1.1}^{2.2}:a_{1.0}^{2.2}=-\frac{1}{\xi}.$$

Così seguitando, per i quadrinomi del terzo grado si avrebbe la espressione:

$$(14)\begin{cases} a_{r.s}^{3.0}\psi^3+a_{r.s}^{3.1}\psi^2 A(\psi)+a_{r.s}^{3.2}\psi\overline{A(\psi)}^2+a_{r.s}^{3.3}\overline{A(\psi)}^3= \\ \qquad =a_{r.s}^{3.0}\left(\psi-\frac{1}{\xi}A(\psi)\right)\left(\psi+b_{r.s}^{2.2}A(\psi)\right)\left(\psi+b_{r.s}^{3.3}A(\psi)\right) \\ \qquad b_{r.s}^{3.3}=\dfrac{a_{r.s}^{3.0}+a_{r.s}^{3.1}\xi-a_{r.s}^{2.2}\xi^2}{a_{r.s}^{3.0}\xi} \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni nella (2) e tenendo conto della (8), si avrà infine:

$$(15)\begin{cases} A(\varphi\psi)=\left(\psi-\frac{1}{\xi}A(\psi)\right)\sum_{r.s}\left\{a_{r.s}^{1.0}+\left(\psi+b_{r.s}^{2.2}A(\psi)\right)\left[a_{r.s}^{2.0}+\right.\right. \\ \qquad\left.\left.+\left(\psi+b_{r.s}^{3.3}A(\psi)\right)\left\{a_{r.s}^{3.0}+\cdots\right\}\right]\right\}\varphi^{r-s}\overline{A(\varphi)}^s \\ \qquad+\frac{1}{\xi}A(\psi)A(\varphi). \quad (1) \end{cases}$$

Analoga espressione si avrebbe ordinando rispetto alle potenze delle ψ ed $A(\psi)$; si può dunque mettere la (15) sotto la forma più simmetrica:

$$(16)\begin{cases} A(\varphi\psi)=\left(\varphi-\frac{1}{\xi}A(\varphi)\right)\left(\psi-\frac{1}{\xi}A(\psi)\right)\left\{\alpha_0+\alpha_{1.0}(\varphi+\psi)+\right. \\ \qquad\left.+\alpha_{1.1}\left(A(\varphi)+A(\psi)\right)+\alpha_{2.0}\varphi\psi+\cdots\right\} \\ \qquad+\frac{1}{\xi}A(\varphi).A(\psi). \end{cases}$$

Nel caso in cui sia identicamente

$$A(1)=\xi=0,$$

le formule (15), (16) hanno forma indeterminata, al teorema di moltiplica-

(1) L'algoritmo $a_0+a_1\{a_2+a_3[a_4+\cdots\ ]\}$, ha proprietà analoghe a quelle delle frazioni continue; spero, in altra occasione, di farne oggetto speciale di studio.

zione si può dare, in questo caso, una forma più conveniente osservando che, dalle identità (5) e (6), per $\xi = 0$ si ricavano le altre:

$$(17) \qquad \begin{cases} a^{1.1}_{1.0} = a^{1.0}_{1.1} = 1 \\ a^{m.0}_{r.s} = a^{m.n}_{r.0} = 0 \,. \end{cases}$$

Introducendo queste ipotesi nella formula (2) e ricordando le (8), potremo dare alla regola di moltiplicazione la forma:

$$(18) \qquad A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi) + A(\varphi)\, A(\psi) \,.\, \Big\{ a^{1.1}_{1.1} + a^{2.1}_{1.1}(\varphi + \psi) + \\ + a^{2.2}_{1.1}\big(A(\varphi) + A(\psi)\big) + a^{2.2}_{2.1}\varphi\psi + \cdots \Big\}$$

la quale dunque dovrà usarsi tutte le volte che $A(1) = 0$.

È appena necessario far notare che fra le operazioni A, che hanno una legge di moltiplicazione esprimibile con una delle formole (16), (18), sono comprese tutte quelle fino ad ora introdotte nella analisi.

Come primo esempio supponiamo nella formula (16):

$$\alpha_0 = \alpha_{1.0} = \alpha_{1.1} = \cdots = 0$$

ed

$$A(1) = \xi = 1 \,;$$

avremo il teorema di moltiplicazione

$$A(\varphi\psi) = A(\varphi) \,.\, A(\psi)$$

proprio della operazione:

$$\theta(\varphi) = \varphi + \Delta(\varphi)$$

la quale è appunto distributiva anche rapporto alla moltiplicazione.

Si supponga in secondo luogo α_0 diversa dallo zero, e tutti gli altri coefficienti α identicamente nulli.

Avremo così la formula di moltiplicazione

$$(19) \qquad A(\varphi\psi) = \left(\varphi - \frac{1}{\xi} A(\varphi)\right)\left(\psi - \frac{1}{\xi} A(\psi)\right) \alpha_0 + \frac{1}{\xi} A(\varphi)\, A(\psi) \,.$$

Facendo in questa formula $\alpha_0 = \beta\xi$, e tenendo conto delle relazioni

$$\beta\xi + \gamma = 0$$
$$\alpha\xi + \beta = 1$$

si ha la formula di moltiplicazione:

$$A(\varphi\psi) = \alpha A(\varphi)\, A(\psi) + \beta\big(\varphi A(\psi) + \psi A(\varphi)\big) + \gamma\varphi\psi$$

che è quella studiata dal Pincherle per cercare una generalizzazione della proprietà del determinante Wronskiano [1].

[1] Cfr. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. VI, 2 maggio 1897.

Se nella formula (19) poniamo $\alpha_0 = -\xi$ si ha

$$A(\varphi\psi) = -\xi\varphi(\psi) + \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi)$$

e se in questa supponiamo inoltre

$$\xi = 0 ,$$

avremo

$$A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi)$$

che è il teorema di moltiplicazione per la derivazione ordinaria.

A questo teorema si poteva giungere direttamente dalla formula (18) supponendovi tutti i coefficienti $a_{r.s}^{m.n}$ identicamente nulli.

Se invece, in questa stessa formula si suppone che il primo coefficiente a sia eguale all' unità e che sieno nulli tutti gli altri, si ha il teorema di moltiplicazione

$$A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi) + A(\varphi) A(\psi)$$

che appartiene alla operazione di differenziazione finita:

$$\Delta \varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x) .$$

Matematica. — *Sulla generalizzazione della proprietà del determinante Wronskiano.* Nota del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali del secondo ordine con due variabili indipendenti.* Nota del dott. P. Burgatti, presentata dal Socio V. Cerruti.

1. In questa Nota, che ho l' onore di presentare alla R. Accademia, mi propongo di far conoscere un metodo molto elementare per dedurre e studiare le trasformate differenziali di una equazione differenziale del secondo ordine con due variabili indipendenti. I risultati che si ottengono sono, per l'equazione lineare, quegli stessi ottenuti dai signori Darboux e R. Liouville in casi particolari e dal prof. Niccoletti nel caso generale [1]: per quelle

[1] *Sulla trasformazione delle equazioni lineari del secondo ordine.* Pisa, tip. Nistro, 1897. In questa Memoria si trovano le altre indicazioni sull'argomento che io ometto per brevità.

non lineari, quegli stessi che si possono ottenere coll' applicazione del metodo d' integrazione che il sig. Darboux spiegò nella notissima Memoria del 1870, pubblicata negli Annales de l' Ecole Normale Supérieure.

Abbiasi un' equazione generale del secondo ordine:

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

nella quale compariscono tutti gli argomenti indicati, di significato ben noto. Si supponga d' aver trovato, quando è possibile, una trasformazione di contatto capace di trasformare l' equazione proposta in un' altra mancante di una qualunque delle coppie d' argomenti:

$$\begin{array}{ll} z, q & , \; z, p \\ z, t & , \; z, r \\ q, t & , \; p, r. \end{array}$$

Considerando il primo caso, l' equazione si riduce alla forma

$$\varphi(x, y, p, r, s, t) = 0. \tag{1'}$$

Derivando rispetto ad x, si ottiene:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \tag{2}$$

e ricavando t dalla (1′), poi sostituendo in (2), questa assume la forma

$$\mathrm{A}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2\mathrm{B}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \mathrm{N} = 0, \tag{3}$$

ove A, B, C, N sono funzioni di $x, y, p, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$. È evidentemente una equazione del secondo ordine in p, lineare nelle derivate seconde, ed è una trasformata differenziale della (1′). Il suo integrale è

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},$$

essendo z l' integrale della (1′); quindi, integrata la (1′) resta integrata anche questa. Ma viceversa: se si riesce ad integrare la (3), si può determinare mediante quadrature la z che soddisfa alla (1′). Infatti, noto p, si ricaverà t dalla (1′) e si avrà

$$q = \int\left(\frac{\partial p}{\partial y}dx + t\,dy\right).$$

Quando l' equazione proposta si riducesse a mancare di una delle coppie d' argomenti z, t o q, t, il ragionameuto fatto vale ancora, avvertendo di

eliminare poi rispettivamente q o z; se invece si riducesse a mancare di una delle altre tre coppie

$$z\,,p\quad,\quad z\,,r\quad,\quad p\,,r\,,$$

bisognerebbe derivare rispetto ad y ed eliminare poi rispettivamente r, p o z.

Sull' equazione (3) si potrebbe ora applicare nuovamente il ragionamento fatto sulla (1), e così via; ma io non voglio in questa Nota trattenermi su considerazioni generali: mi limito a trattare alcune equazioni di forma speciale ed importante, per le quali il modo di trasformazione indicato conduce all' integrazione completa od a risultati notevoli.

2. Consideriamo l' equazioni della forma

$$f(r\,;s\,t)=0\,, \tag{4}$$

le quali mancano contemporaneamente delle coppie d' argomenti $z\,,p$ e $z\,,q$. Derivando rispetto ad x, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=0\,.$$

Posto $p=z'$ ed indicando colle solite lettere, ma accentate, le derivate di z', l' equazione precedente dopo l' eliminazione di t assume la forma:

$$\mathrm{A}(p'\,,q')\,r'+\mathrm{B}(p'\,,q')\,s'+\mathrm{C}(p'\,,q')\,t'=0\,.$$

Questa equazione ammette sempre due integrali primi con una costante arbitraria (1), appartenenti a caratteristiche diverse, ed i casi d' integrazione col metodo di Monge ed Ampère si possono facilmente discutere. Questi casi, come ha mostrato il sig. De Boer (2), corrispondono a quelli con cui l' equazione (4) è integrabile col metodo di Darboux.

3. Consideriamo ora l' equazioni della forma

$$f(r\,,s\,,z)=0\,, \tag{5}$$

che supporremo risolute rispetto a z:

$$z+\varphi(r\,,s)=0\,.$$

Derivando rispetto ad x e ponendo $p=z'$, si ottiene colle solite notazioni:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q'}\,s'+\frac{\partial\varphi}{\partial p'}\,r'+z'=0\,,$$

giacchè $\varphi(r\,,s)=\varphi(p'\,,q')$.

(1) Goursat, *Equations différentielles du second ordre*. Tom. I.

(2) De Boer, Arch. Néerl. XXVII (1893); W. Speckman, Arch. Néerl. XXVII.

Le caratteristiche di questa equazione sono definite dai due sistemi differenziali seguenti:

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial q'}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial p'}dy = 0\\ &z'dx + \frac{\partial\varphi}{\partial p'}dp' = 0\\ &dz' - p'dx - q'dy = 0\end{aligned}\right. \qquad (b)\quad \left\{\begin{aligned} &dy = 0\\ &z'\partial x + \frac{\partial\varphi}{\partial q'}dq' + \frac{\partial\varphi}{\partial p'}dp' = 0\\ &dz' - p'dx - q'dy = 0\end{aligned}\right.$$

Il sistema (b) ammette l'integrale $y = \text{cost}$ qualunque sia φ, mentre il sistema (a) non ne ammette in generale. Però, eliminando fra le sue equazioni dx e dy, si giunge all'equazione

$$z'dz' + \left(p'\frac{\partial\varphi}{\partial p'} - q'\frac{\partial\varphi}{\partial q'}\right)dp' = 0\,.$$

la quale si può integrare quando sia

$$p'\frac{\partial\varphi}{\partial p'} - q'\frac{\partial\varphi}{\partial q'} = \mathrm{F}(p')\,.$$

Ma di qui si trae che $\varphi(p', q')$ deve avere la forma

$$\psi_1(p') + \psi_2(p'q')\,,$$

essendo ψ_1 e ψ_2 due funzioni qualunque rispettivamente degli argomenti p' e $p'q'$; onde si conclude: L'equazioni riducibili alla forma

$$z = \psi_1(r) + \psi_2(rs)$$

si possono trasformare in altre aventi due integrali primi con una costante arbitraria ed appartenenti a caratteristiche diverse. Altrettanto si può dire per l'equazioni del tipo:

$$z = \psi_1(t) + \psi_2(ts)\,.$$

4. La sola equazione della forma $f(s, z) = 0$ che si possa integrare dopo una prima trasformazione è quella di Liouville

$$s = e^z.$$

Derivando rispetto ad x e poi eliminando z, si trova

$$s' = z'q' \qquad (p = z')\,,$$

la quale si sa integrare. Come ha notato il sig. Darboux nella Memoria citata, l'equazione di Liouville è la più semplice fra quelle della forma $f(s, z) = 0$ che si possono integrare col metodo da lui esposto.

5. Per l'equazione della forma

$$(6)\qquad s + ap + bq + cz = 0\,,$$

ove a, b, c sono funzioni soltanto di x ed y, il metodo di trasformazione indicato coincide con quello di Laplace e Lewy. Infatti, posto $z = z_1 e^{-\int a dy}$, l'equazione diventa

$$s_1 + b_1 q_1 + c_1 z_1 = 0;$$

dalla quale derivando rispetto ad y ed eliminando z, si trae un'equazione della forma (6) che ha per integrale

$$z' = \frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{\partial z e^{\int a dy}}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) e^{\int a dy}.$$

È la trasformazione di Laplace, a meno di un fattore.

Se invece coll'aiuto di una soluzione particolare σ della proposta si elimina da essa il termine in z, poi si deriva ad esempio rispetto ad y e si elimina p, si trova un'equazione della stessa forma che ha per integrale

$$z' = \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial y}.$$

È la trasformazione di Lewy.

Nella stessa maniera si vede subito che per l'equazioni del tipo parabolico non esiste una trasformazione analoga a quella di Laplace, ma esiste quella di Lewy.

Consideriamo adesso l'equazione più generale

$$ar + 2bs + ct + lp + mq + nz = 0, \quad (b^2 - ac \neq 0)$$

lineare rispetto a z ed alle sue derivate. È sempre possibile ridurla alla forma

$$a_1 r_1 + 2b_1 s_1 + l_1 p_1 + n_1 z_1 = 0$$

con una trasformazione del gruppo

$$\xi = x, \quad \eta = \eta(x, y), \quad z_1 = \lambda(x, y) z.$$

Derivando allora rispetto a ξ ed eliminando poi z_1, si trova un'equazione pure lineare ed omogenea che ha l'integrale

$$z' = \frac{\partial z_1}{\partial \xi},$$

ossia, tornando alle antiche variabili,

$$z' = \alpha \frac{\partial z}{\partial x} + \beta \frac{\partial z}{\partial y} + \gamma z.$$

È la trasformazione di Laplace generalizzata da Légendre [1].

Supponiamo invece di conoscere due soluzioni particolari μ e λ dell'equazione proposta; allora è possibile, operando successivamente il cambiamento di funzione

$$z = \lambda . z_1$$

ed il cambiamento di variabile

$$\xi = x\,,\quad \eta = \frac{\mu(x, y)}{\lambda(x, y)}\,,$$

ridurre l'equazione alla forma:

$$a_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial \xi^2} + 2b_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial \xi\, \partial \eta} + c_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial \eta^2} + l_1 \frac{\partial z_1}{\partial \xi} = 0\,.$$

Se questa si deriva rispetto a ξ e poi si elimina $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$, si giunge ad una equazione pure lineare ed omogenea, la quale ha per integrale

$$z' = \frac{\partial z_1}{\partial \xi}\,,$$

cioè, tornando alle antiche variabili,

$$z' = \frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}\,.$$

Questa espressione di z' si annulla per $z = \lambda$ e $z = \mu$, cioè per due soluzioni della proposta ed è da esse definita. Se poi si applicasse la trasformazione indicata n volte di seguito, si giungerebbe ad un'equazione della stessa forma che ammette per integrale un'espressione lineare in z e nelle sue derivate fino a quelle d'ordine n, la quale si annulla per $2n$ soluzioni particolari della proposta.

Si ritrovano così le trasformate studiate dal Darboux e dai sig. R. Liouville e Niccoletti; e si vede come il metodo adoperato si presti molto semplicemente per dedurre tutti i teoremi ottenuti da questi autori.

6. Infine mi permetto d'indicare una trasformazione *integrale*, la quale è una generalizzazione di quella d'Imschenetsky [2] e si può riguardare, almeno in molti casi, come l'inversa della precedente.

Abbiasi l'equazione lineare nelle derivate seconde di z

$$\mathrm{A}r + 2\,\mathrm{B}s + \mathrm{C}t + \mathrm{M} = 0\,,$$

[1] Vedi Imschenetsky, *Étude sur les méthodes d'intégration des équations du second ordre . . .* ecc., traduzione di Hoüel, pag. 61.

[2] Memoria citata, pag. 50, 51.

ove A, B, C, M sono funzioni di x, y, p e q. Dicendo λ_1 e λ_2 la radici dell' equazione

$$A\lambda^2 - 2B\lambda + C = 0,$$

l' equazioni delle caratteristiche sono:

$$a) \begin{cases} dz - pdx - qdy = 0 \\ dy - \lambda_1 dx = 0 \\ A\lambda_1 dp + Cdq + M\lambda_1 dx = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} dz - pdx - qdy = 0 \\ dy - \lambda_2 dx = 0 \\ A\lambda_2 dp + Cdq + M\lambda_2 dx = 0 \end{cases}$$

Consideriamo uno qualunque di questi sistemi, ad esempio il sistema a). È chiaro che si può sempre, ed in infiniti modi, formare una combinazione lineare delle due ultime equazioni in guisa da potersi mettere sotto la forma

$$\lambda_1 d_x U + d_y V = 0,$$

essendo U e V due funzioni di x, y, p, q, e rappresentando con d_x, d_y i differenziali rispetto ad x, p, q e ad y, p, q rispettivamente. Allora il sistema a) si scrive:

$$\begin{cases} dz - pdx - qdy = 0 \\ dy - \lambda_1 dx = 0 \\ d_y V + \lambda_1 d_x U = 0 \end{cases}$$

Da questo sistema si risale all' equazione eliminando $\frac{dy}{dx}$ tra le equazioni

$$dy - \lambda_1 dx = 0$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) dy - \lambda_1 \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) dx = 0,$$

ove le parentesi stanno ad indicare che anche p e q si riguardano funzioni di x ed y. Si trova

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0.$$

Ottenuta questa forma dell' equazione proposta, poniamo

$$U(x, y, p, q) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$V(x, y, p, q) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

poi risolviamo queste equazioni rispetto a p e q e scriviamo la condizione d'integrabilità. Si ottiene un' equazione del secondo ordine in φ, il cui integrale si ha per quadratura quando sia noto quello della proposta.

Matematica. — *Sulla classificazione delle congruenze.* Nota di Giovanni Bordiga, presentata dal Socio Cremona.

I sistemi ∞^{n-1} di raggi di uno spazio fondamentale S_n godono della importante proprietà, dovuta a Segre ([1]), che le rette del sistema sono — in generale — tangenti $n-1$ volte ad una varietà focale M_{n-1}. Il numero delle caratteristiche, cioè delle singolarità ordinarie che servono a classificare il sistema, dipende dal numero n.

Per $n=2$ questo numero è 3, e le caratteristiche sono 6; ma il problema di determinare i limiti che i valori di tutte le caratteristiche possono assumere e quello di verificare se ad ogni gruppo di caratteristiche corrisponda un determinato sistema, non furono ancora risolti per alcuno spazio ([2]).

Per $n=3$ il dott. R. Schumacher ([3]) ha stabilito la classificazione delle congruenze algebriche mediante quattro caratteristiche, cioè: l' *ordine* (numero di raggi che passano per un punto), la *classe* (numero di raggi situati in un piano), la *specie* o *rango* (numero delle coppie di raggi che appartengono ad un fascio piano con una retta arbitraria dello spazio) e un numero t che risulta dalla considerazione di quelle terne di raggi che escono da un punto e sono situati in un piano. (Il numero t esprime quante terne possiede la congruenza i cui centri sono su di un piano, e i cui piani passano per un medesimo punto).

Il dott. Schumacher fondò le sue ricerche nella rappresentazione dello spazio rigato, che contiene la congruenza, sovra uno spazio lineare a 4 dimensioni.

In questa Nota i risultati principali del dott. Schumacher sono ottenuti assai più brevemente dalla geometria sulle curve algebriche; alcuni di essi possono estendersi senza difficoltà al caso generale di S_n.

1. Sia [C] la congruenza dello spazio ordinario di ordine n e classe m.

Una retta arbitraria a è, come si sa, direttrice n^{pla} di una rigata F situata su [C] che è dell' ordine $n+m$. Sia p il genere di una sua sezione γ^{m+n} situata in un piano arbitrario α; sia O la traccia a su α. La curva γ avrà in O un punto n^{plo}.

Ordine della superficie focale. L' ordine è dato dal numero dei punti sulla retta a per i quali passano due raggi di [C] infinitamente vicini.

([1]) Segre, *Un' osservazione sui sistemi di rette degli spazi superiori.* Rend. Circ. Mat. Palermo, t. II, pag. 148.

([2]) G. Loria, *Il passato ed il presente delle dottrine geometriche,* pag. 46.

([3]) R. Schumacher, *Classification der algebraischen strahlensysteme.* Math. Ann. XXXVII, pag. 100.

I raggi di [C] uscenti dai punti di a determinano su γ una serie di $g^1{}_n$. Il numero dei punti doppi di questa serie sarà il numero domandato.

Poichè una serie g_n^r su una curva di genere p contiene in generale (¹)

$$(r+1)(n+rp-r)$$

gruppi con un punto multiplo secondo $r+1$, si deduce che l' ordine della superficie focale è

$$N = 2(n+p-1) \text{ (}^2\text{)}.$$

2. *Classe della superficie focale.* Essa è data dal numero dei piani che passano per una retta arbitraria a e nei quali due raggi della [C] sono infinitamente vicini. A sua volta questo numero è dato dalle tangenti che si possono condurre alla curva γ dal punto O. Poichè il fascio delle rette di centro O, nel piano α, determina sulla γ una serie $g^1{}_m$ che ha $2(m+p-1)$ gruppi con un punto doppio, si deduce che la classe della superficie focale è

$$M = 2(m+p-1).$$

3. *Rango della congruenza.* Il numero delle coppie di raggi di [C] che appartengono ad un fascio colla retta a eguaglia il numero delle coppie di punti che sulla curva γ hanno in comune le due serie $g^1{}_n$ $g^1{}_m$ dianzi considerate.

Poichè due serie $g^1{}_n$ $g^1{}_m$ giacenti su una curva di genere p hanno

$$\binom{n-1}{r}(m-r) - \binom{n-2}{r-1}p$$

gruppi di $r+1$ punti comuni (³), si deduce che il rango della congruenza è dato da

$$\varrho = (n-1)(m-1) - p$$

4. Se la retta a coincide con un raggio s della congruenza, la rigata F è dell' ordine $m+n-2$, perchè un piano condotto per s taglia F secondo s, che è $(n-1)^{pla}$, e contiene altri $m-1$ raggi di [C]. La sezione di F con un piano arbitrario α sarà dunque una curva δ dell' ordine $m+n-2$ con punto $(n-1)^{plo}$ in O, e del genere p_1 diverso da p.

(¹) Castelnuovo, *Geometria sulle curve algebriche*. R. Acc. Scienze, Torino, vol. XXIV.

(²) Per il sistema ∞^{n-1} di raggi dello spazio S_n se μ è l' ordine del sistema, cioè il numero dei raggi che passano per un punto arbitrario, e se $\mu+\nu$ è l' ordine della rigata che ha per direttrice una retta arbitraria, e se questa rigata è di genere p, l' ordine della varietà focale M_{n-1} è $2(\nu+p-1)$.

(³) Castelnuovo, l. c.

Il raggio s, che tocca la superficie focale in due punti, la incontrerà altrove in N — 4 punti. In questo caso la serie g^1_{n-1} determinata sulla curva δ dai raggi di [C] uscenti dai punti di s dovrà dare

$$2(n-1+p_1-1)=N-4$$

gruppi con punto doppio; dalla quale relazione si ha

$$p_1=p-1$$

5. Sulla curva δ la serie g^1_{n-1} precedentemente considerata e la serie g^1_{m-1} determinata dalle rette del fascio O, hanno in comune

$$\tau=(n-2)\ (m-2)-p_1$$

gruppi di due punti, e si ha così il numero

$$\tau=(n-2)\ (m-2)-p+1$$

delle coppie di raggi della congruenza che sono in un fascio piano con un raggio arbitrario della congruenza stessa.

6. Quando tre raggi di [C] uscenti da un punto generico dello spazio sono in un piano, diremo che costituiscono una *terna di raggi*; il piano che li contiene lo diremo *piano della terna*; il loro punto comune lo diremo *centro della terna*. I centri delle terne costituiscono una superficie che diremo *superficie delle terne*.

Per determinare l'ordine di questa superficie, cioè il numero dei punti che essa ha comune con una retta arbitraria a, bisognerà determinare quante terne di punti dei gruppi della serie g'_n sulla curva γ si trovano in una retta. Ogni retta del piano α determina su γ una serie g^2_{m+n} e le due serie hanno in comune

$$T'=\binom{n-1}{2}(m+n-2)-(n-2)p$$

gruppi di tre punti; dal numero T' bisogna però togliere due volte (1) il nu-

(1) Così, ad esempio, si consideri la congruenza di 3° ordine e 1ª classe, reciproca di quella formata dalle corde di una cubica sghemba. Per essa la rigata F^4 ha sezioni piane razionali e non esiste superficie delle terne. I valori $n=3$ $m=1$ $p=0$ danno adunque $T'=2$, dal quale togliendo $2\left|{3 \atop 3}\right|$ si ha appunto $T=0$.

Per un altro esempio, consideriamo la congruenza del 3° ordine e della 6ª classe con 10 punti singolari (Rend. Acc. Lincei vol. VI pag. 8, 1890). Per essa $n=3$, $m=6$, $p=5$. Non esiste superficie delle terne. Infatti se tre raggi $\{k\}$ immagini dei coni K^3 di F^6_3 fossero in un piano, tre punti singolari della congruenza (3.6) studiata da Castelnuovo (Atti Ist. Veneto, vol. V, pag. 12, 1887) sarebbero in linea retta; il che non può essere perchè i sei punti singolari sono proiettati su un piano arbitrario da ogni asse di F^3_3 in sei punti di una conica. Si ha dunque $T'=2$ dal quale numero togliendo $2\left|{3 \atop 3}\right|$ si ottiene appunto $T=0$.

mero delle combinazioni 3 a 3 degli n raggi uscenti dal punto O; si avrà così che l' ordine cercato è

$$T = (n-2)\left[\frac{(n-1)(3m+n-6)}{6} - p\right] \text{ (1)}$$

7. Le formole ottenute da Schumacher sono:

$$\begin{aligned} N &= 2\,m\,(n-1) - 2\varrho \\ M &= 2\,n\,(m-1) - 2\varrho \\ \tau &= \varrho - n - m + 4 \\ T &= (n-2)\left[\varrho + \frac{(n-1)(n-3m)}{6}\right] \end{aligned}$$

le quali coincidono con quelle più sopra ottenute.

Fisica biologica. — *Studî sopra l'azione dei raggi Röntgen sui vegetali.* Nota di GIULIO TOLOMEI, presentata dal Socio BLASERNA.

Secondo una comunicazione di A. Schober, fatta alla Società botanica germanica, risulterebbe che i raggi Röntgen non esercitano un' influenza sensibile sopra la vita vegetale. Lo Schober sottoponendo delle piante all' azione di un tubo di Hittorf notò che la luce emanata da esso, a differenza di quella del sole, non provoca affatto l' incurvamento eliotropico e ne concluse che i raggi Röntgen non esercitano alcuna influenza sopra lo sviluppo vegetale.

Per altro tale affermazione non è fondata sopra fatti che abbiano un grande valore, perchè la durata dell' esposizione delle piante all' azione della luce del tubo di Hittorf fu solo di trenta minuti, e questa durata non poteva essere sufficiente per produrre in una pianta modificazioni tali da essere apprezzate con osservazioni superficiali.

Fu notato pure [2] che la *Phycomices nitens*, che si curva sotto l' influenza asimmetrica di molti agenti esterni, anche delle onde hertziane secondo Heyler, non è per nulla sensibile all' azione dei raggi Röntgen; ma anche

(1) Ritenute le notazioni precedenti, l' ordine della varietà V_{n-1} luogo dei punti dai quali escono n raggi del sistema situati in uno spazio ad $n-1$ dimensioni, è

$$T = \binom{\nu-1}{n-1}(\mu+\nu-n+1) - \left|\begin{matrix}\nu-2\\n-2\end{matrix}\right| p - 2\left|\begin{matrix}\nu\\n\end{matrix}\right|;$$

e per un dato raggio del sistema, il numero T dei punti, per ognuno dei quali $n-1$ raggi uscenti da esso si trovano col raggio dato in uno spazio ad $n-1$ dimensioni, è:

$$\tau = \left|\begin{matrix}\nu-2\\n-2\end{matrix}\right|(\mu-n+1) - \left|\begin{matrix}\nu-3\\n-3\end{matrix}\right|(p-n+2).$$

(2) *Comptes Rendus*, 30 marzo 1896.

da queste esperienze non può concludersi che l'azione di tali raggi sulle piante sia nulla, giacchè in esse si è preso a considerare solo un effetto meccanico prodotto dalla luce, mentre svariatissimi sono i fenomeni che si compiono nei vegetali sotto l'azione delle radiazioni luminose.

Fino dalla scoperta dei raggi Röntgen io mi era proposto di ricercare, come seguito ai miei studî anteriori, quale azione essi esercitano sopra lo sviluppo dei vegetali; ma incontrai delle difficoltà insuperabili per l'impossibilità di potere assoggettare una pianta all'azione di tali raggi per una durata sufficientemente grande che permettesse di dedurne qualche cosa di concludente. Una pianta assoggettata per 30 minuti, o per un'ora, all'azione dei raggi Röntgen non dà luogo a nessun fenomeno apprezzabile, e neppure si nota niente di notevele se la pianta è assoggettata all'azione di tali raggi per 30 minuti al giorno durante 15 giorni di seguito. Per altro da questi soli fatti non è possibile trarre nessuna conseguenza, perchè per poter concludere qualche cosa, seguendo questa via, sarebbe necessario prolungare per molto tempo l'esposizione delle piante all'azione dei raggi Röntgen, e stabilire poi un confronto fra esse e quelle esposte all'azione della luce del sole. Tale modo di sperimentare, già abbastanza incerto quando si adoperano luci artificiali che possono essere impiegate in modo continuo, come la luce elettrica, la luce del magnesio, ecc.; è assolutamente impraticabile quando si tratta dei raggi Röntgen, non essendo possibile mantenere un tubo di Crookes in azione per tutto il tempo che sarebbe necessario senza metterlo fuori di servizio. Naturalmente potendo impiegare parecchi tubi e senza preoccuparsi se si guastano, si potrebbe fare l'esperienza, ma richiederebbe dei mezzi superiori a quelli di cui ordinariamente si può disporre.

Nè si creda che l'esperienza non ne valesse la pena, giacchè è tutt'altro che chiarita la natura dei raggi Röntgen, e anche la semplice osservazione dell'effetto da essi prodotto sullo sviluppo dei vegetali, può portare un po' di luce sull'argomento.

Non potendo fare delle sperienze dirette, cercai di girare la quistione servendomi di un metodo che altra volta mi diede dei buoni risultati in alcune ricerche istituite per studiare l'azione della luce del magnesio sui vegetali (1), metodo già seguito dal Prillieux per altre luci, e che consiste nella determinazione della quantità di gas sviluppata, sotto l'azione della luce che si studia, dai rami delle piante acquatiche immersi nell'acqua carica di anidride carbonica.

Il Prillieux (2) adoperando dei ramoscelli di *Elodea canadensis* immersi nell'acqua carica di anidride carbonica, ed esposti alla luce del sole ed alla

(1) *Le Stazioni Sper. Agr. Italiane*, vol. XXIV, pag. 377.

(2) *Comptes Rendus* vol. LXIX, pag. 408.

luce elettrica, ottenne uno sviluppo di bolle di gas delle quali il numero medio al minuto fu in quattro esperienze di:

	I	II	III	IV
Alla luce del sole	22,6	28,75	20,6	21
Alla luce elettrica	11,8	6,6	11,8	8,9

Io adoperando invece la luce del sole e la luce del magnesio ottenni i risultati seguenti [1]:

	I	II	III	IV
Alla luce del sole	21,4	27,6	21,8	21,4
Alla luce del magnesio. . .	13,2	11,4	11,8	9,6

Ho ripetuto le stesse esperienze assoggettando i rami di *Elodea canadensis* all'azione della luce del sole ed a quella dei raggi Röntgen provenienti da un tubo di Crookes a pera, con catodo a callotta sferica di circa 3 cm. di diametro e anodo piano, ed ho ottenuto i risultati seguenti:

	I	II	III	IV
Alla luce del sole	20,8	22,3	25,9	24,2
Alla luce del tubo di Crookes.	4,6	4,3	3,8	5,7

Come si vede vi è stato sviluppo di gas anche sotto l'azione dei raggi Röntgen, e sebbene questo sviluppo sia stato molto minore di quello ottenuto con la luce del sole, con la luce elettrica e con quella del magnesio, pure esiste e dimostra in modo indiscutibile che l'azione dei raggi Röntgen sopra i vegetali, almeno in ciò che concerne lo sviluppo del gas nelle condizioni dell'esperienza, è identica, quantunque si eserciti in grado molto minore, a quella della luce di qualsiasi origine. È inutile che faccia notare che i ramoscelli di *Elodea canadensis* non danno affatto sviluppo di gas quando sono mantenuti nell'oscurità, e che quindi lo sviluppo di gas notato sperimentando coi raggi Röntgen non può essere attribuito che a questi.

Il rocchetto adoperato per mettere in azione il tubo di Crookes proveniva dalla casa Gaiffe di Parigi, aveva l'interruttore del tipo Gordon ed era eccitato dalla corrente fornita da una batteria di accumulatori a diaframma.

Una difficoltà non indifferente la trovai nel contare le bolle di gas che si staccavano dal rametto posto nell'acqua, giacchè alla luce del tubo di Crookes era impossibile vederle distintamente, e d'altra parte era necessario contarle con esattezza, essendo fondato sul numero delle bolle che si svolgevano in un dato tempo, il criterio per giudicare dell'azione dell'agente adoperato. Due furono i metodi impiegati a tale scopo, metodi affatto differenti, ma che condussero ai medesimi risultati.

[1] *Le Stazioni Sper. Agr. Italiane,* vol. XXIV, pag. 385.

In un certo numero di esperienze contavo le bolle di gas che si svolgevano durante 20 minuti dal rametto di *Elodea canadensis*, quando l'illuminazione era prodotta dalla luce di una lanterna da fotografia, contavo le bolle che si svolgevano nei successivi 20 minuti sotto l' azione del tubo di Crookes, sempre con la luce della lanterna, e contavo le bolle che si svolgevano nei 20 minuti successivi sotto la sola azione della luce della lanterna; poi facevo la media dei numeri ottenuti nella prima e nell' ultima determinazione e la sottraevo dalla media ottenuta nei 20 minuti, durante i quali il rametto era stato assoggettato all' azione dei raggi Röntgen. Come si capisce dovevo in tal modo ottenere con grandissima approssimazione il numero delle bolle svolte esclusivamente per l' azione di tali raggi, tanto più che il numero delle bolle di gas che si svolgono alla luce rossa della lanterna è molto piccolo. Del resto bastava solo il fatto dell' aumento del numero delle bolle quando il rametto era assoggettato, oltre che alla luce della lanterna, a quella del tubo di Crookes per concludere che i raggi Röntgen esercitano un' azione analoga a quella della luce. Ma volendo avere dei numeri esatti, onde potere stabilire un confronto fra le intensità delle due azioni, era necessario determinare il numero delle bolle di gas che si svolgevano sotto la sola azione dei raggi Röntgen, indipendentemente dall' azione di qualsiasi sorgente luminosa. A tale scopo, basandomi sul fatto che le bolle di gas che si svolgono dal rametto immerso nell' acqua venendo a scoppiare alla superficie producono un leggero rumore, posi la bacinella nella quale si trovava il rametto sopra la tavoletta di un microfono nel circuito del quale era inserita una pila ed un ricevitore telefonico. Tenendo quest' ultimo all' orecchio si percepiva così distintamente il rumore prodotto da ogni bolla di gas che veniva a scoppiare alla superficie del liquido, da poter contare le bolle di gas che si svolgevano con la stessa esattezza con la quale si sarebbero potute contare servendosi della luce.

Le esperienze fatte con i due metodi furono parecchie, e tutte presentarono una tale concordanza nei risultati da far ritenere che i metodi stessi avevano il medesimo grado di esattezza. Dei risultati riportati sopra quelli segnati sotto i numeri I e II furono ottenuti contando le bolle servendosi della lanterna, e quelli segnati sotto i numeri III e IV servendosi del telefono.

Constatato il fatto che i raggi Röntgen, sebbene molto più debolmente, pure esercitano sopra i vegetali un' azione identica a quella della luce, cercai se lo stesso fenomeno si verifica per i vegetali inferiori, i quali come è noto, sono molto sensibili all' azione della luce.

La prima serie di esperienze fu fatta adoperando il *Mycoderma aceti* (*Bacterium aceti* e *B. Pasteurianum*, secondo Hansen). Impiegai a tale scopo un liquido ottenuto aggiungendo a del vino bianco dell' acido acetico

e dell' acqua in quantità da portare la ricchezza dell'acido al 3 %, e quella dell'alcool al 5 %. Questo liquido fu sterilizzato, posto in due bottiglie a collo molto largo e seminato con *Mycoderma* allo stato di proliferazione, coltivato in vino bianco identico a quello adoperato per la preparazione del liquido fermentabile. Le due bottiglie furono chiuse con tappi di sughero paraffinati, a perfetta tenuta, traversati da un tubo di vetro, contenente per un certo tratto dell' ovatta sterilizzata, che doveva condurre nell' interno l' ossigeno necessario allo sviluppo del *Mycoderma*, in modo che se ne potesse misurare con una sufficiente approssimazione la quantità, come dirò in seguito.

Le due bottiglie furono poste all' oscuro, ed in capo a tre giorni, essendosi cominciato a formare alla superficie il velo di *Mycoderma*, furono poste in bussolotti di cartone ricoperti di parecchi strati di carta nera, che impedivano affatto l' accesso della luce, ed una di esse fu assoggettata all' azione dei raggi Röntgen provenienti da un tubo di Crookes, posto col fondo immediatamente sopra il turacciolo di sughero.

Per constatare l' andamento della fermentazione nel liquido contenuto nelle due bottiglie, notavo semplicemente se aumentava o diminuiva la quantità di ossigeno assorbita in un dato tempo, senza occuparmi di misurarla con grande esattezza essendo ciò affatto inutile per quello che mi interessava di notare. A tale scopo univo il tubo innestato nel turacciolo, del quale ho parlato sopra, con un tubo piegato ad U, contenente dell' acqua per un certo tratto, il quale funzionava da manometro.

Quando uno dei rami era unito con il tubo della bottiglia, per l' assorbimento dell' ossigeno prodotto dal *Mycoderma*, diminuiva nell' interno la pressione e quindi si produceva un dislivello nell' acqua. Versando nel tubo tanta acqua da ricondurre il livello del liquido nei due rami sopra lo stesso piano orizzontale si poteva avere, con molta approssimazione, il volume in $cm.^3$ dell' ossigeno assorbito, e quindi un criterio per giudicare dell' attività vitale del *Mycoderma*.

Sperimentando in questo modo, assoggettando durante un' ora una delle bottiglie all' azione dei raggi Röntgen, mentre l' altra era mantenuta nelle condizioni ordinarie, per poter servire come termine di confronto, ottenni in sei esperienze i risultati seguenti:

$Cm.^3$ di ossigeno assorbiti durante un' ora

N.° dell' esperienza	liquido assoggettato all' azione dei raggi Röntgen	liquido mantenuto nell' oscurità
1	6,5	9,8
2	7,6	10,1
3	8,1	10,5
4	7,8	11,4
5	7,9	10,6
6	7,3	10,2

Come si vede la quantità di ossigeno assorbita dal liquido assoggettato all'azione dei raggi Röntgen si mantenne sempre minore di quella assorbita dal liquido mantenuto nelle condizioni ordinarie e nell'oscurità, e siccome lo stesso fatto avviene nel caso che il liquido fermentibile sia sottoposto all'azione della luce solare, così se ne deve concludere che l'azione dei raggi Röntgen è anche in questo caso identica a quella della luce. Solamente mentre, con la stessa esposizione, la luce del sole avrebbe arrestata affatto la fermentazione, i raggi Röntgen ne hanno solamente diminuita l'intensità.

Per riscontrare se l'azione dei raggi Röntgen produce una modificazione permanente nell'attività vitale del *Mycoderma aceti*, furono alternativamente scambiate di posto le bottiglie assoggettando quella che prima era mantenuta nelle condizioni ordinarie all'azione dei raggi Röntgen e viceversa; ma i risultati ottenuti furono identici ai precedenti, o per lo meno differirono tanto poco da essi da far ritenere che l'azione dei raggi Röntgen, almeno per la durata delle esperienze in questione, non ha che un'influenza momentanea sull'attività del *Mycoderma aceti*.

Le stesse esperienze, con una disposizione identica, furono ripetute col *Saccharomices ellipsoideus*, determinando invece della quantità di ossigeno assorbita, la quantità di anidride carbonica sviluppata. I risultati ottenuti furono analoghi ai precedenti e dimostrarono che l'attività del fermento diminuisce sempre sotto l'azione dei raggi Röntgen, precisamente come avviene sotto l'azione della luce: solo tale diminuzione è molto minore.

Oltre che sopra i fermenti, io mi sono occupato di studiare l'azione dei raggi Röntgen sopra i batteri, e specialmente sopra il *Bacillus antracis* che si presta molto bene per queste ricerche.

Come è noto le spore del *B. antracis* seminate nell'acqua distillata esposta alla luce solare muoiono in gran parte, e la potenza germinativa di quelle che rimangono è molto diminuita. Lo stesso avviene sotto l'azione dei raggi Röntgen.

Presa dell'acqua seminata con le spore del *B. antracis* e rimescolatala ben bene, la divisi in tre provette, delle quali una fu assoggettata all'azione della luce solare, una a quella dei raggi Röntgen, ed una mantenuta nell'oscurità. Dopo due ore fu aggiunta una goccia dell'acqua di ciascuna provetta a della gelatina sterilizzata che fu versata in tre bacinelle piatte di vetro in istrato molto sottile, in modo da ottenere in ciascuna di esse una pellicola trasparente nella quale era facile seguire lo sviluppo delle colonie. Poste le bacinelle in un termostato, dopo 24 ore le spore contenute nella gelatina seminata con l'acqua mantenuta nell'oscurità cominciarono a germogliare e diedero origine ad un numero così grande di colonie che la gelatina sembrava come coperta da un velo di polvere.

Invece nella gelatina seminata con l' acqua esposta all' azione dei raggi Röntgen ed all' azione della luce solare, lo sviluppo cominciò a manifestarsi più tardi, ed avvenne molto più lentamente con una grande differenza nelle due bacinelle; giacchè mentre nella gelatina seminata con l' acqua esposta all' azione della luce del sole poche colonie si formarono, a grande distanza le une dall' altre, separate da regioni di gelatina perfettamente trasparente e nelle quali non aveva quindi avuto luogo nessuno sviluppo, nella gelatina seminata con l' acqua esposta all' azione dei raggi Röntgen il numero delle colonie era molto più grande, ma non tale che queste ricoprissero interamente la lamina come nella gelatina seminata con l' acqua non esposta all' azione della luce del sole.

La stessa esperienza fu ripetuta unendo alla gelatina sterilizzata una gocccia di acqua infettata e ponendo poi le tre bacinelle con lo strato di gelatina nelle condizioni nelle quali prima erano stati posti i tubi. I risultati ottenuti furono li stessi: solo le differenze furono più appariscenti e si mostrarono più rapidamente. I raggi Röntgen agiscono dunque sulle culture di *B. antracis* come i raggi solari: solo la loro azione è molto meno energica.

In un' altra esperienza cercai di determinare se l' azione dei raggi Röntgen si limita alla porzione di gelatina direttamente colpita da essi, come avviene per la luce, oppure si propaga anche nelle regioni circostanti.

A tale scopo seminai un gran numero di spore nell' acqua sterilizzata, in modo che un centimetro cubo ne conteneva da 1 a 4 milioni, e aggiunsi 5 goccie di quest' acqua a della gelatina allo stato fluido, che dopo essere stata agitata ben bene fu versata in una bacinella di vetro, dove fu lasciata solidificare in uno strato sottile che conteneva circa 4 milioni di spore invisibili. Sopra lo strato di gelatina, alla distanza di mezzo millimetro circa, fu posta una lastra di zinco nella quale era stata intagliata la lettera X, ed il tutto fu involto in parecchi strati di carta nera, in modo che la luce non potesse penetrare affatto nell' interno, ed assoggettato per tre ore all' azione del tubo di Crookes. Tolti poi li inviluppi e la lastra di zinco, la bacinella fu posta all' oscuro in un termostato. La pellicola di gelatina non mostrava alcuna alterazione perchè le spore, morte o viventi che siano, hanno una tale piccolezza che non alterano affatto la trasparenza della gelatina, e d' altra parte nessuna di esse aveva avuto ancora il tempo di germogliare. Dopo 24 ore la regione della gelatina coperta dallo zinco era perfettamente opaca a causa delle numerose colonie di batteri sviluppatesi sopra di essa, mentre la regione sottostante alla lettera X intagliata nello zinco, cioè quella assoggettata direttamente all' azione dei raggi Röntgen, mostrava solo una leggiera opacità prodotta da un piccolo numero di colonie che si erano sviluppate, dimodoche la lettera X si vedeva distintamente per trasparenza sopra un fondo opaco. Questo fatto, oltre confermare i risultati ottenuti nelle espe-

rienze precedenti, dimostra che l'azione dei raggi Röntgen è localizzata alla regione colpita da essi, precisamente come ha luogo con la luce del sole e con la luce di tutte le altre sorgenti luminose.

Rimaneva da vedere se i raggi Röntgen agiscono direttamente sopra le spore, oppure esiste un'azione tossica dovuta ai prodotti che possono essere originati nel mezzo nutritivo.

Per risolvere tale quistione seminai delle spore nell'acqua pura, la versai in quattro capsule di Petri e mantenni per qualche tempo quest'ultime alla temperatura di 60°-70° centigradi, in modo da fare evaporare completamente l'acqua. In tal modo ottenni sul fondo delle capsule uno strato pulverulento di spore senza che queste avessero perduto nulla della loro attività vitale. Preparate poi delle lamine di agar perfettamente sterilizzate, le posi in bacinelle di vetro, le coprii con la lastra di zinco nella quale era stata intagliata la lettera X e le assogettai all'azione dei raggi Röntgen. Se l'azione di tali raggi sopra lo sviluppo delle spore dipendeva dalla formazione di qualche prodotto tossico nell'agar, applicando la lamina di agar così trattata su di uno strato di spore preparato nel modo detto sopra e che non aveva subìta l'azione della luce nè quella dei raggi Röntgen, non doveva aversi il germogliamento nella regione corrispondente alla lettera X, mentre doveva aversi nella regione rimanente della placca, o, per lo meno, doveva notarsi una differenza nello sviluppo delle spore nelle due regioni. Ma andando ad eseguire l'esperienza, trovai che niente di tutto ciò avviene, e riscontrai che le spore si sviluppavano egualmente sopra tutta la superficie dell'agar. Se ne deve concludere che le condizioni del mezzo alimentare non sono affatto alterate dall'azione dei raggi Röntgen.

Per confermare questi risultati in modo assoluto, feci l'esperienza inversa nel modo seguente. Accanto alla pellicola di agar esposta all'azione dei raggi Röntgen, come ho detto sopra, esposi nelle medesime condizioni, sotto una lastra di zinco con la lettera X intagliata, una capsula contenente sul fondo uno strato pulverulento di spore: se i raggi Röntgen esercitano un'azione diretta sopra le spore, quelle in corrispondenza della lettera X dovevano essere uccise, o almeno doveva essere attenuata la loro attività vitale, e quindi ponendo una pellicola di agar sul fondo della capsula così esposta si doveva ottenere una lettera trasparente sopra un fondo opaco, quando le spore avessero avuto il tempo ed il modo di germogliare. Fatta l'esperienza riscontrai che ciò avveniva realmente, e così potei stabilire che i raggi Röntgen esercitano un'azione diretta sopra le spore e non modificano sensibilmente le qualità alimentari del mezzo nutritivo adoperato.

Tale risultato fu ottenuto adoperando solamente l'agar, ma non vi è ragione di credere che non debba avvenire lo stesso con altri mezzi nutritivi.

Lo stesso risultato fu ottenuto prendendo alcune spore in germinazione su di una placca di agar, e ponendole sopra un' altra placca sulla quale la maggior parte delle spore erano state uccise dall' azione dei raggi Röntgen: esse prosperarono su questa superficie così bene come sopra la placca che non era stata assoggettata all' azione dei raggi Röntgen; ciò che conferma che l' azione di tali raggi, qualunque essa sia, non è la conseguenza di un avvelenamento del mezzo nutritivo, ma di una modificazione della sostanza delle spore della quale, per ora, non è possibile precisare la natura.

Concludendo, possiamo dire che l' azione dei raggi Röntgen sui vegetali, almeno in ciò che concerne i fatti studiati in queste ricerche, è identica a quella della luce; e questo può essere un argomento in favore della ipotesi che ammette essere tali raggi di natura simile a quella della luce ordinaria, cioè vibrazioni eteree.

Zoologia. — *Sulla morfologia dei Diplopodi.* Nota del dott. Filippo Silvestri, presentata dal Socio G. B. Grassi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando alcuni opuscoli inviati dal Socio straniero Koelliker, il 13° volume delle *Opere* di A. Cayley, dono dell' Università di Cambridge, e un volume contenente le *Osservazioni astronomiche, magnetiche e meteorologiche* fatte dall' Osservatorio di Greenvich nel 1894.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Blaserna dà comunicazione dei seguenti elenchi di lavori presentati ai concorsi a premi, scaduti col 31 dicembre 1897.

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio reale
per la *fisiologia normale e patologica.*
(Scadenza 31 dicembre 1897. — Premio L. 10,000).

1. Albertoni Pietro. 1) *Ricerche sulla secrezione biliare* (st.). — 2) *Sul contegno e sulla azione degli zuccheri nell' organismo* (st.). — 3) *Ricerche sul bilancio nutritivo dell' uomo* (st.). — 4) *Ricerche di fisiopatologia* (st.). — 5) *Memorie varie* (st.).

2. Boselli Elia. *L' affinità elettiva sessuale nell' uomo bianco* (st.).

3. Fano Giulio. 1) *Sulle oscillazioni del tono auricolare del cuore* (st.). — 2) *Azione di alcuni veleni sulle oscillazioni del tono auricolare nel cuore dell' emys europaea* (st.) (in collab. con S. Sciolla). — 3) *Di alcuni rapporti fra le proprietà contrattili e le elettriche degli atri cardiaci* (st.) (in collab. con V. Fayod). — 4) *Di alcuni metodi di indagine in fisiologia* (st.). — 5) *Contributo alla fisiologia del corpo tiroide* (st.) (in collab. con L. Zanda). — 6) *Sulla fisiologia del cuore embrionale del pollo nei primi stadi dello sviluppo* (st.) (in collab. con F. Badano). — 7) *Di alcuni fondamenti fisiologici del pensiero*; *saggio di psicofisiologia sperimentale* (st.). — 8) *Sulla funzione e sui rapporti funzionali del corpo tiroide* (st.). — 9) *Intorno agli effetti delle lesioni portate sull' organo dell' udito* (st.) (in collab. con G. Masini). — 10) *Intorno ai rapporti funzionali fra apparecchio auditivo e centro respiratorio* (st.) (in collab. con G. Masini). — 11) *Sulla contrattilità polmonare* (st.) (in collab. con G. Fasola). — 12) *Sul chinismo respiratorio negli animali e nelle piante* (st.). — 13) *Di un apparecchio che registra graficamente le quantità di acido carbonico eliminato* (st.). — 14) *Laboratorio di fisiologia* (st.). — 15) *Contributo alla localizzazione corticale dei poteri inibitori* (st.). — 16) *Sugli Atti riflessi* (ms.).

4. Lustig Alessandro. *Risultati delle ricerche fatte in India negli animali e nell' uomo intorno alla vaccinazione preventiva contro la peste bubbonica e alla sieroterapia* (st.).

5. Petrone Angelo. 1) *Contributo sull' azione della tubercolina nei tisici* (*con due autopsie*) (st.). — 2) *Nuovo segno dello pneumotorace nel cadavere e conseguente modifica della tecnica* (st.) — 3) *Contributo alla tecnica della sezione del cuore in sito* (st.). — 4) *Ricerche chimiche e sperimentali sullo avvelenamento da acido pirogallico* (st.). — 5) *Contributo sperimentale alla fisio-patologia del sangue, biologia delle piastrine. Teoria più verosimile della coagulazione* (st.). — 6) *Sulla coagulazione del sangue* (st.). — 7) *L' apparenza di zooide e sue manifestazioni nell' emasia adulta dei vivipari* (Nota preliminare) (st.). — 8) *Sull' esistenza del nucleo nel globulo rosso adulto dei mammiferi* (Nota preliminare) (st.). — 9) *Ricerche ulteriori sull' esistenza del nucleo nell' emasia adulta di altri mammiferi — fissazione, collaborazione semplice e doppia permanente: chiusura a secco* (st.). — 10) *Ricerche complementari sull' esistenza del nucleo nell' emasia adulta dei mammiferi* (st.). — 11) *Contributo alla questione sulla esistenza delle piastrine nel sangue normale* (st.). — 12) *L' acido formico nella tecnica della collaborazione nucleare ed un nuovo liquido il « formio-carminio » — contributo speciale alla collaborazione del nucleo delle emasie* (st.). — 13) *L'esistenza del nucleo nell'emasia adulta dei mammiferi* (st.).

6. STEFANI ARISTIDE. 1) *L'incrociamento dei nervi utilizzato per lo studio delle funzioni dei centri nervosi.* Note I e II (st.). — Lavori sulla circolazione: 2) *Della influenza del sistema nervoso sulla circolazione collaterale* (st.). — 3) *Contribuzione farmacologica alla dottrina dell'attività della diastole* (st.) (in collab. con G. Gallerani). — 4) *Cardiovolume, pressione pericardica e attività della diastole* (st.). — 5) *Come si modifica la capacità dei diversi territori vascolari col modificarsi della pressione* (st.). — 6) *L'azione locale vasodilatatrice dell' urea cresce col crescere della pressione* (st.). — 7) *Mutamenti fisici e mutamenti fisiologici del lume dei vasi* (st.). — 8) *Dell'azione vasomotoria reflessa della temperatura* (st.). — 9) *Dell' azione della temperatura sui centri bulbari del cuore e dei vasi* (st.). — 10) *Intorno all' azione protettrice dei vaghi sul cuore* (st.). — 11) *Azione della pressione arteriosa sui vasi e sul cuore* (st.). — Lavori sul sistema nervoso: 12) *Contribuzione all'istogenesi della corteccia cerebellare* (st.) (in collab. con G. Bellonci). — 13) *Se possono unirsi fra di loro le superficie centrali di sezione delle fibre nervose* (st.). — 14) *In qual modo il vago polmonare modifica il ritmo del respiro quando aumenta e quando diminuisce la pressione nella cavità dei polmoni.* (st.) (in collab. con C. Sighicelli). — 15) *Intorno ai centri visivi dei colombi ed alle fibre commessurali* (st.) (in collab. con G. Gallerani). — 16) *Se il moncone centrale di un nervo si possa unire col moncone periferico di un nervo più lungo* (st.) (in collab. con E. Cavazzani). — 17) *Della proprietà delle fibre nervose di mantenere isolati i loro monconi centrali* (st.). — 18) *Fisiologia dell' encefalo* (st.).

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio del Ministero della P. I. per le *scienze naturali*.
(Scadenza 31 dicembre 1897. — Premio L. 1,500).

1. CACCIAMALI G. B. 1) *Geologia della collina di Castenedolo e connessavi questione dell' uomo pliocenico* (st.). — 2) *Geologia Arpinate* (st.). — 3) *A proposito di fenomeni carsici* (st.). — 4) *Cariàdeghe, altipiano carsico sopra Serle* (st.). — 5) *Filogenesi delle Idrante* (st.).

2. CHELUSSI ITALO. 1) *Di due roccie a glaucofane dell' isola del Giglio* (st.). — 2) *Alcune roccie di Campiglia* (st.). — 3) *Le roccie del vallone di Valnontey in Val di Cogne* (st.). — 4) *Contribuzioni petrografiche* (st.). — 5) *Alcune roccie della Garfagnana* (st.). — 6) *Brevi cenni sulla costituzione geologica di alcune località dell' Abbruzzo aquilano* (st.)

3. PAOLUCCI LUIGI. *Nuovi materiali e ricerche critiche sulle piante fossili terziarie dei gessi di Ancona* (st.).

4. Virgilio Francesco. 1) *La collina di Torino in rapporto alle Alpi, all' Appennino ed alla pianura del Po* (st.). — 2) *Sulla origine della Collina di Torino* (st.). — 3) *Argomenti in appoggio della nuova ipotesi sulla origine della Collina di Torino* (st.).

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze e lettere di Copenaghen; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Sidney; il Museo di zoologia comparata di Cambridge Mass.

Annunciano l' invio delle proprie pubblicazioni:

La Società scientifica chilena di Santiago; la Società geologica canadese, di Ottawa.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 2 gennaio 1898.

Bertini E. — Quand' è che due curve piane dello stesso ordine hanno le stesse prime polari? Torino, 1897. 8°.

Calderara F. — Trattato di Trigonometria rettilinea e sferica. Palermo, 1896. 8°.

Calendario dell' Osservatorio dell' Ufficio centrale di meteorologia e di geodinamica al Collegio Romano. Anno XIX, 1898. Roma, 1898. 16°.

Carazzi D. — Guida-catalogo del Museo civico della Spezia. Spezia, 1898. 16°.

Cayley A. — The collected mathematical papers. Vol. XIII, 1897. 4°.

De Luca G. — Che cosa è la temperatura dei corpi ed il calorico che produce. Molfetta, 1897. 8°.

Id. — Della inesistenza del calorico specifico come quantità di calorico dei corpi. Molfetta, 1897. 8°.

Kölliker A. v. — Marcello Malpighi e l' anatomia generale. Milano, 1897. 8°.

Id. — Ueber den Dilatator pupillae. Würzburg, 1897. 8°.

Id. — Ueber die Tyson'schen Drüsen des Menschen. Würzburg, 1897. 8°.

Liverani P. — Scale e porte di soccorso nei teatri nei casi d' incendio. Bologna, 1897. 8°.

Montano G. — Contributo intorno alla malattia dovuta ad uno speciale microrganismo che si produce sopra alcune graminacee. Melfi, 1897. 8°.

Oddone E. — Osservazioni freatimetriche eseguite nell' Osservatorio geofisico di Pavia e dintorni. Pavia, 1897. 4°.

Papers printed to commemorate the incorporation of the University College of Sheffield. Sheffield, 1897. 8°.

Petrus de Dacia. — Commentarius in Algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco, ed. et praef. est M. Curtze. Hauniae, 1897. 8°.

Raddi A. — Le bonifiche italiane. Napoli, 1897. 16°.

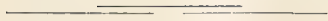
Rivista del servizio minerario nel 1896. Roma, 1897. 4°.

Saija G. — Nuovo diagramma geográfico para la resolución gráfica de los problemas de navigación ortodrómica. S. l. 1897. 8°.

Salinas E. — Sulle Esterie del trias di Sicilia. Palermo, 1897. 8°.

Toni G. B. de. — Intorno alla vita ed alle opere di V. Trevisan naturalista padovano. Venezia, 1897. 8°.

Whiteaves J. F. — Palaeozoic fossils. Vol. III, 3. Ottawa, 1897. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 gennaio 1898.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla generalizzazione della proprietà del determinante Wronskiano.* Nota del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

L' annullarsi identico del determinante

$$(1) \qquad [A^{(r)}(\varphi_s)] \quad (r, s = 0, 1, \dots n-1)$$

esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè fra le n funzioni analitiche $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$, che hanno un campo comune di convergenza, passi una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, rispetto alla operazione A, ogni qualvolta tale operazione ha una delle forme [1]:

$$(2) \quad \begin{cases} A(\varphi) = D(\varphi) = \dfrac{d\varphi}{dx}, \qquad A(\varphi) = \Delta(\varphi) = \varphi(x+1) - \varphi(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A(\varphi) = \theta(\varphi) = \varphi(x+1) \\ A(\varphi) = S(\varphi) = \varphi(\mu x), \quad A(\varphi) = \eta D(\varphi) + \xi\varphi, \quad A(\varphi) = \alpha S(\varphi) - \beta\varphi. \end{cases}$$

[1] Per la operazione $\Delta(\varphi)$ vedasi F. Casorati, *Il calcolo delle differenze finite.* Ann. di Mat., serie II, t. X. — La operazione $S(\varphi)$ fu, in questo senso, studiata dal Grévy. *Étude sur les équations fonctionnelles,* Ann. de l' Ec. Normale, III série, t. XI. — Per le ultime due forme della operazione A, vedasi la Nota di S. Pincherle che porta il medesimo titolo della presente, nella serie V, vol. VI, 1897, di questi Rendiconti. Si veda anche la Nota di G. Peano, nel medesimo volume, a pag. 413, col titolo: *Sul determinante Wronskiano.*

Ora è noto che ogni operazione funzionale distributiva definisce una omografia nello spazio generale, e, nello studio di queste omografie [1], non si ha altro modo per riconoscere la esistenza di legami, della forma $\sum_{r=0}^{n-1} \psi_r \varphi_r = 0$, fra n punti $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ dello spazio funzionale, che l'esame del Wronskiano relativo a quei punti. Per tal modo però non si può accertare che la esistenza di tali legami espressi da equazioni lineari omogenee con coefficienti costanti rispetto alla operazione di derivazione ordinaria, mentre le proprietà invariantive dei coefficienti dovrebbero riferirsi alla operazione funzionale che si considera.

Ora, poichè nei casi di operazioni funzionali espressi dalle formole (2), il fatto che i coefficienti ψ_r sono costanti può esprimersi mediante la condizione che il fattore μ_r, determinato dalla relazione

$$A(\psi_r) = \psi_r \mu_r,$$

sia identicamente uguale ad A(1), mi sono proposto di dimostrare che, anche nel caso generale di operazioni distributive qualunque a determinazione unica, fatte le medesime ipotesi sui coefficienti, l'annullarsi del determinante (1) serve ancora a dare il criterio per riconoscere la esistenza di relazioni lineari omogenee formate con tali coefficienti.

Il caso dei coefficienti numericamente costanti viene così naturalmente compreso, di modo che, qualunque sia la operazione A, l'annullarsi del determinante $[A^{(r)}(\varphi_s)]$ $(r, s = 0, 1, \dots n-1)$ porta di conseguenza l'annullarsi del Wronskiano $[D^{(r)}(\varphi_s)]$ $(r, s = 0, 1 - n \dots 1)$, ma non reciprocamente.

Poichè il modo di comportarsi del determinante $[A^{(r)}(\varphi_s)]$ $(r, s = 0, 1 \dots n-1)$ dipende dalla legge di moltiplicazione della operazione A, non ho potuto lasciare questa legge completamente arbitraria ed ho fatto la ipotesi (abbastanza generale per comprendere tutte le operazioni A usate nella analisi) che la espressione di $A(\varphi\psi)$ sia razionale ed intera nelle φ, ψ, $A(\varphi)$, $A(\psi)$, del resto con coefficienti qualunque e di grado qualunque.

Le funzioni che qui si considerano sono sempre supposte analitiche, ed i risultati ottenuti si intendono veri in ogni campo comune di convergenza.

Fatte queste restrizioni, ho già dimostrato che il teorema di moltiplicazione può essere espresso da una delle due formole:

$$(3)\quad A(\varphi\psi) = \left(\varphi - \frac{1}{\xi}A(\varphi)\right)\left(\psi - \frac{1}{\xi}A(\psi)\right)\Big\{\alpha_0 + \alpha_1(\varphi + \psi) + \\ + \alpha_2\left(A(\varphi) + A(\psi)\right) + \alpha_3\varphi\psi + \cdots\Big\} + \frac{1}{\xi}A(\varphi) \, . \, A(\psi),$$

[1] Si veda l'importante Memoria di S. Pincherle, *Sur le calcul fonctionnel distributif,* nell'ultimo fascicolo dei Math. Annalen.

$$(4)\quad A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi) + A(\varphi) A(\psi) \Big\{ \alpha_0 + \alpha_1(\varphi + \psi) + \\ + \alpha_2 \Big(A(\varphi) + A(\psi)\Big) + \alpha_3\varphi\psi + \cdots \Big\},$$

di cui la seconda vale nei casi in cui si ha identicamente $\xi = A(1) = 0$, e la prima vale in ogni altro caso.

Fondandosi su queste formule si può, in modo puramente algebrico, trovare la proprietà enunciata del determinante $[A^r(\varphi_s)]$, come ora spero di dimostrare.

Sia Γ il campo di convergenza comune alle funzioni φ ed $A(\varphi)$, e si chiami Γ' il campo che risulta da Γ toltivi i punti radici della $\varphi(x)$. La funzione μ, definita dalla relazione

$$A(\varphi) = \varphi\mu,$$

e che ha con le φ ed $A(\varphi)$ un campo comune di convergenza contenuto in Γ', sarà in quel che segue, chiamata *moltiplicatore della funzione* φ *rispetto alla operazione* A.

Quelle funzioni che ammettono il moltiplicatore $\xi = A(1)$, per analogia a quello che si fa nell' ordinario calcolo differenziale, saranno chiamate *costanti per la operazione* A.

Teorema I. *La condizione necessaria e sufficiente perchè sia soddisfatta identicamente la relazione*

$$(5)\qquad A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi)$$

per qualunque funzione ψ, *è che si abbia* $A(\varphi) = \varphi\xi$; *cioè che la* φ *sia costante per la operazione* A.

La condizione è sufficiente:

Sia prima ξ non identicamente nulla. Per ogni funzione φ, costante per la operazione A, si hanno le relazioni:

$$\varphi - \frac{1}{\xi} A(\varphi) = 0, \quad \frac{1}{\xi} A(\varphi) = \varphi$$

e la formola di moltiplicazione (3) si riduce semplicemente ad

$$A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi)$$

che dimostra l' enunciato.

Sia poi $\xi = 0$. Avremo identicamente:

$$A(\varphi) = \varphi\xi = 0,$$

e la formola (4) di moltiplicazione, dà, anche per questo caso:

$$A(\varphi\psi) = \varphi . A(\psi).$$

La condizione è necessaria:

Ed invero, se per ogni ψ deve aversi $A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi)$; per $\psi = 1$ si avrà $A(\varphi) = \varphi A(1) = \varphi\xi$; cioè la φ sarà una costante per la operazione A.

La dimostrazione qui fatta rende manifesta la analogia fra quelle funzioni che abbiamo chiamato costanti rispetto alla operazione A, e le costanti numeriche in rapporto alla derivazione ordinaria, di più ci prova che esse non differiscono da quelle funzioni che il Pincherle chiama *periodi della operazione* A [1].

Sotto questo punto di vista quindi le due denominazioni di costante, o di periodo, per rapporto ad una data operazione funzionale sono da considerarsi come equivalenti.

Teorema II. *Se la funzione φ è costante per la operazione* A, *anche la sua inversa è costante per quella stessa operazione.*

Si ponga $\psi = \frac{1}{\varphi}$. Per l'ipotesi posta avremo

$$\begin{aligned} A(\varphi\psi) &= \varphi A(\psi), \text{ cioè} \\ A(1) &= \varphi A(\psi), \text{ ed infine} \\ A(\psi) &= \psi . A(1) = \psi\xi, \end{aligned}$$

che prova l'asserto.

Teorema III. *Il prodotto ed il quoziente di una funzione analitica ψ per una costante rispetto alla operazione funzionale* A, *sono funzioni che hanno, rispetto ad* A, *lo stesso moltiplicatore della ψ.*

Ed infatti se $A(\psi) = \psi\mu$, ed $A(\varphi) = \varphi\xi$, si ha, pei teoremi (1) e (2):

$$(6) \qquad \begin{cases} A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi) = \varphi\psi . \mu \\ A\left(\frac{\psi}{\varphi}\right) = \frac{1}{\varphi} A(\psi) = \frac{\psi}{\varphi} . \mu . \end{cases}$$

Reciprocamente. *Il quoziente di due funzioni analitiche che hanno un campo comune di convergenza ed ammettono lo stesso moltiplicatore rispetto ad una operazione funzionale* A, *è una costante per la operazione* A.

Ed invero, sia

$$(7) \qquad A(\varphi) = \varphi\mu, \quad A(\psi) = \psi\mu$$

e si ponga $\psi = \varphi\omega$.

Dalla seconda delle (7) si ricava:

$$\begin{aligned} A(\varphi\omega) &= \varphi\omega\mu; \text{ cioè} \\ A(\varphi\omega) &= \omega A(\varphi). \end{aligned}$$

La funzione ω è dunque costante per la operazione A.

[1] *Sulla generalizzazione della proprietà del determinante Wronskiano,* loc. cit., §. 5.

Da questo teorema, e per essere la operazione A distributiva, si ha:

Teorema IV. *Se le funzioni analitiche* $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$, *convergono in un campo comune* Γ, *ed ammettono tutte lo stesso moltiplicatore, qualunque funzione lineare omogenea a coefficienti costanti*

$$\psi = \omega_0 \varphi_0 + \omega_1 \varphi_1 + \cdots + \omega_{n-1} \varphi_{n-1},$$

ammette lo stesso moltiplicatore, rispetto alla operazione funzionale A.

In particolare se le $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ fossero tutte costanti, lo sarebbe anche la ψ.

Se di più poniamo $\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_0$, $\varphi_2 = \lambda_2 \varphi_0$, ... $\varphi_{n-1} = \lambda_{n-1} \varphi_0$, i quozienti $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}$ saranno tutti costanti per la operazione A di modo che si ha il teorema:

Teorema V. *Se fra n funzioni analitiche* $\psi_0, \psi_1, \dots \psi_{n-1}$, *convergenti in un campo comune* Γ, *esiste una relazione lineare omogenea con coefficienti che convergono in quello stesso campo ed ammettono un moltiplicatore comune rispetto alla operazione* A, *per tutti i punti del campo che si ottiene da* Γ *togliendovi le radici di quei coefficienti, ha luogo una relazione lineare omogenea fra le* $\psi_0, \dots, \psi_{n-1}$, *a coefficienti costanti per quella operazione funzionale.*

Si potrebbe anzi aggiungere che di questi coefficienti uno può sempre farsi eguale alla unità.

Teorema VI. *La condizione necessaria e sufficiente perchè fra n funzioni analitiche* $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_{n-1}$, *che hanno un campo comune di convergenza, passi una relazione lineare omogenea* $\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s \varphi_s = 0$, *a coefficienti costanti rispetto ad una operazione funzionale distributiva ed a determinazione unica* A, *è che sia identicamente nullo il determinante* $[A^{(r)}(\varphi_s)]$ $(r, s = 0, 1 \dots n-1)$...

La condizione è necessaria:

Ed infatti dalla relazione $\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s \varphi_s = 0$, per successiva applicazione della operazione A, si hanno le altre: $\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s A^{(r)}(\varphi_s) = 0$ $(r = 1, 2 \dots n-1)$, e per la coesistenza di queste si richiede che sia nullo identicamente il determinante $[A^{(r)}(\varphi_s)]$ $(r, s = 0, 1 \dots n-1)$.

La condizione è sufficiente:

Ciò è anzitutto manifesto per sistemi formati da due sole funzioni perchè, dall'esser nullo identicamente il determinante $\begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 \\ A(\varphi_0) & A(\varphi_1) \end{vmatrix}$, si ricava $\frac{A(\varphi_0)}{\varphi_0} = \frac{A(\varphi_1)}{\varphi_1} = \mu$; cioè $A(\varphi_0) = \varphi_0 \mu$, $A(\varphi_1) = \varphi_1 \mu$: ed allora, pel Teo-

rema III, il quoziente $\frac{\varphi_0}{\varphi_1}$ è una funzione λ_1 costante per la operazione A, e si ha la relazione identica $\varphi_0 - \lambda_1 \varphi_1 = 0$.

Supponiamo ora il Teorema dimostrato per sistemi di $n-1$ funzioni e dimostriamolo per sistemi di n funzioni. Si vede facilmente che:

$$[A^{(r)}(\varphi_s)]\,(r\,,s=1\,...\,n-1) = \frac{1}{A(\varphi_0)\,A^{(r)}(\varphi_0)\,...\,A^{(n-2)}(\varphi_0)}$$
$$[A^{(r)}(\varphi_s)\,A^{(r+1)}(\varphi_0) - A^{(r+1)}(\varphi_s)\,A^{(r)}(\varphi_0)]\;(r\,,s=1\,,2\,,...\,n-1)$$

Il determinante al 2° membro è della forma $[A^{(r)}(\Omega_s)](r,s=1,2,...n-1)$ ed è relativo alle $n-1$ funzioni $\Omega_s = \varphi_s A(\varphi_0) - \varphi_0 A(\varphi_s)\,(s=1,2...n-1)$. Questo determinante inoltre è identicamente nullo, perchè lo è il primo membro, ed esiste un campo comune di convergenza alle funzioni analitiche $A^{(r)}(\varphi_0)$.

Siccome però il teorema si suppone dimostrato per sistemi di $n-1$ funzioni, così fra le Ω_s dovrà passare una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e si avrà:

$$\omega_1\Big(\varphi_0 A(\varphi_1) - \varphi_1 A(\varphi_0)\Big) + \omega_2\Big(\varphi_0 A(\varphi_2) - \varphi_2 A(\varphi_0)\Big) + \cdots +$$
$$+ \omega_{n-1}\Big(\varphi_0 A(\varphi_{n-1}) - \varphi_{n-1} A(\varphi_0)\Big) = 0\,.$$

Una tale relazione può anche scriversi sotto la forma

$$\begin{vmatrix} \varphi_0 & \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s \varphi_s \\ A(\varphi_0) & A\left(\sum_{s=1}^{n-1} \omega_s \varphi_s\right) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Abbiamo visto però che l'annullarsi identico di questo determinante porta ad una relazione della forma:

$$\varphi_0 - c_1 \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s \varphi_s = 0$$

con c_1 costante per la operazione A; cioè, finalmente, alla relazione:

$$\varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \varphi_{n-1} = 0\,,$$

con coefficienti costanti per la operazione A, come appunto si voleva provare.

Botanica. — *Un nuovo carattere di affinità tra le Calycanthaceae e le Rosaceae desunto dall' embriologia.* Nota preliminare pel dott. B. LONGO, presentata dal Corrispondente R. PIROTTA [1].

Le *Calycanthaceae* (gen. *Calycanthus* Linn. e *Chimonanthus* Lindl.) sono ora senz' altro considerate dai Sistematici — sia quale famiglia a sè, sia quale tribù delle *Monimiaceae* — come faciente parte della grande serie delle *Polycarpicae.*

Già però fin da più di un secolo A. L. De Jussieu (1789) aveva indicata l' affinità del genere *Calycanthus* con le *Rosaceae.* Ma, quantunque ripetuta ancora tale affinità da altri Autori posteriori (Endlicher, Brongniart, Lindley, Tulasne), pure finì col prevalere l' affinità che le *Calycanthaceae* presentano per altri caratteri con le *Monimiaceae* e con le *Magnoliaceae*, tanto che oramai le *Calycanthaceae* sono state definitivamente allontanate dalle *Rosaceae.*

Però è da ricordare che il Baillon (1868 e 1869) risollevava la questione, e per parte sua conchiudeva col ravvicinare di nuovo le *Calycanthaceae* alle *Rosaceae* appunto pei loro caratteri (morfologici) fiorali e carpologici.

Il Baccarini (1884) poi, studiando, quantunque sotto altro punto di vista, dal lato anatomico i ricettacoli fiorali delle *Rosaceae* e delle *Calycanthaceae*, veniva alle stesse conclusioni del Baillon, giacchè il Baccarini riscontrava delle affinità tra le due famiglie anche da quel lato anatomico da lui studiato.

Ora io studiando gli organi riproduttori delle *Calycanthaceae* [2] ho trovato negli ovuli delle affinità marcatissime con quelli delle *Rosaceae.*

Come è noto, in seguito alle ricerche dell' Hofmeister, dello Strasburger, del Fischer e del Guignard tutte le *Rosaceae* (anzi si può ben dire che n' è una delle caratteristiche della famiglia) posseggono costantemente parecchie cellule madri collaterali del sacco embrionale: esse cellule madri si segmentano tangenzialmente dando origine ciascuna ad una serie di cellule figlie, di cui ordinariamente le più interne, ingrandendosi, si possono considerare come tanti sacchi embrionali, di cui però sempre un solo sacco embrionale arriva a differenziarsi ed a venir fecondato, mentre gli altri si arrestano durante lo sviluppo.

Or bene è precisamente l' istesso fenomeno che io ho osservato in tutti gli ovuli (anche nell' ovulo che durante lo sviluppo abortisce dei due trovan-

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

[2] Mi riserbo di pubblicare al più presto un particolareggiato lavoro in proposito.

tesi in ciascun carpello) che ho studiati del *Calycanthus occidentalis* Hook. et Arn. e del *Chimonanthus fragrans* Lindl.

Veramente la pluralità delle cellule madri collaterali del sacco embrionale è stata rinvenuta in diversi rappresentanti di famiglie disparate tra le Fanerogame angiosperme. Però tale fenomeno finora, per quel ch' è a mia conoscenza, non è stato trovato esteso a tutta una famiglia tra le dette Fanerogame — salvo il caso per le *Rosaceae* ed, aggiungo, per le *Calicanthaceae* —, ma è stato trovato limitato solamente ad una od a poche specie, tanto che dagli Autori questi casi isolati vengono senz' altro considerati come mere accidentalità.

Naturalmente non si può parlare di pluralità di sacchi embrionali nelle *Loranthaceae* (erroneamente citate da qualche Autore insieme con le *Rosaceae* tra le Fanerogame angiosperme come esempio di famiglia avente gli ovuli costantemente forniti di diverse cellule madri collaterali del sacco embrionale), giacchè il mammellone emisferico che si trova nell' ovario delle *Loranthaceae* ed in cui si differenziano e si fecondano diversi sacchi embrionali, non è da considerarsi come un ovulo, ma come una vera placenta, mentre alla loro volta ciascun sacco embrionale è da considerarsi come un ovulo ridotto ai minimi termini.

Ora se si tien calcolo, oltre che dei caratteri (morfologici) fiorali e carpologici messi in rilievo tra gli altri specialmente dal Baillon e dei caratteri anatomici dei ricettacoli fiorali messi in rilievo dal Baccarini, anche di questo nuovo carattere, che in questa Nota io son venuto esponendo, della pluralità delle cellule madri collaterali del sacco embrionale — fenomeno generale e costante, giova ripetere, esclusivamente nelle *Rosaceae* e nelle *Calycanthaceae* tra le famiglie delle Fanerogame angiosperme —, parmi che convenga definitivamente far ritorno alla vecchia idea del De Jussieu che cioè questa famiglia critica delle *Calycanthaceae* sia da considerarsi come molto affine a quella delle *Rosaceae*.

Zoologia. — *Note preliminari sulla morfologia dei Diplopodi* [1]. Nota del dott. Filippo Silvestri, presentata dal Socio G. B. Grassi.

I.

Origine dell'organo copulativo.

Fino al 1895 si riteneva con il Latzel che l' organo copulativo dei *Lysiopetalidae* derivasse dalla trasformazione del 1° paio di piedi del settimo segmento. In quell' anno Verhoeff pubblicava un suo lavoro [2], in cui sosteneva invece che tale organo derivava dalla trasformazione di ambo le paia

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio d'anatomia comparata dell' Università di Roma.
[2] Zool. Anz., n. 476.

di piedi del settimo segmento, e che perciò questo segmento nel ♂ non era fornito di piedi ambulatorii.

Sorta questa divergenza, io volli esaminare un po' la questione e credetti poterla risolvere isolando un numero uguale di segmenti di due individui *adulti* ♂ e ♀ di *Lysiopetalum foetidissimum* (Savi) e constatando quante paia di piedi vi appartenessero. Ma essendo nei *Lysiopetalum* le lamine pedigere libere, non è facile assicurarsi di avere isolato con un certo numero di segmenti tutti i piedi corrispondenti; per evitare questa difficoltà io credetti poter prendere i primi otto segmenti di una ♀ con 11 paia di piedi ben sviluppati, e poi altrettanti segmenti di un ♂ con tutti i piedi, che ritenevo loro corrispondenti perchè venivano a trovarsi nella stessa posizione rispetto ai segmenti, di quelli della ♀ ; contavo e trovavo sì nelle ♀ che nei ♂ lo stesso numero di piedi.

Oltre a ciò esaminati dei giovani *Lypsiopetalum foetidissimum* ♂, l'organo copulativo sembrava svilupparsi come da due piccole estroflessioni.

Questi fatti mi indussero ad opinare che l'organo copulativo nei *Lysiopetalum* non derivasse dalla trasformazione nè di un paio di piedi, nè di due, ma che fosse una formazione nuova indipendente da essi; ed estesi allora a tutti i Diplopodi questo mio modo di vedere ([1]).

Verhoeff ([2]) criticò subito violentemente la mia asserzione, ma senza mostrare l'inesattezza dei fatti, che mi avevano condotto a questa conclusione, ed egli anzi rifacendo l'anatomia di tale organo terminava ancora sostenendo che nei *Lysiopetalidae* esso risultava dalla trasformazione di due paia di piedi, e che perciò nel maschio il settimo segmento mancava di piedi ambulatorii.

Finalmente nel 1896 Verhoeff ([3]) tornò all' opinione che l'organo copulativo dei *Lysiopetalidae* deriva dalla trasformazione del 1° paio di piedi del settimo segmento.

Per me rimaneva ancora inesplicabile il fatto constatato dell'egual numero di piedi ambulatorii nel ♂ e nella ♀ del *Lysiopetalum foetidissimum*, quand' ecco che esaminando attentamente i piedi anteriori di una ♀ , ho potuto accertare che il secondo paio di piedi per essersi enormemente ridotto, come mostra la figura 1, mi era sfuggito.

Con tale osservazione veniva tolto di mezzo il fatto, che aveva indotto me ad un altra interpetrazione dell'origine dell'organo copulativo, e trovavo possibile ammettere che nel *Lysiopetalum*, tale organo derivasse da trasformazione di un paio di piedi.

([1]) Nat. Sic. XIV, n. 12 e Ann. Mus. Civ., Genova (2) XVI (XXXVI) pagg. 131-132.
([2]) Arch. f. Naturg. Jahr. 1896, Bd. I, H. 1, p. 21.
([3]) Zool. Anz., n. 518.

Mio intendimento è stato allora di seguire passo passo lo sviluppo dell'organo copulativo, senza la conoscenza del quale in questioni simili non si può giungere ad un giudizio definitivo.

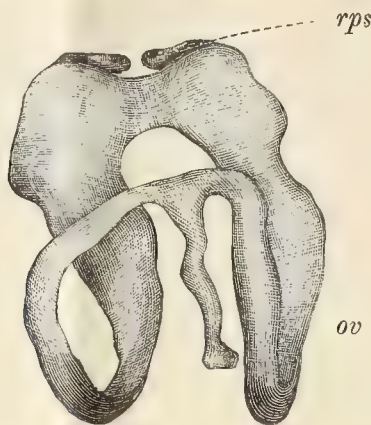



Fig. 1.

Per mancanza di materiale non avendo potuto esaminare tutti gli stadî di trasformazione dei piedi nel *Lysiopetalum*, ho scelto un *Julide*, che per la sua frequenza ed abbondanza si presentava assai meglio adatto per tale studio: il *Pachyiulus communis* (Savi).

In tutti i giovani individui ♀ e ♂ con 30-35 segmenti, si trovano sviluppati normalmente nel settimo segmento due paia di piedi.

Esaminando attentamente dei ♂ con 35 a 40 segmenti, si osserva che i piedi del 7° segmento sono già un poco più piccoli degli altri.

Di mano in mano che questi ♂ vanno innanzi nello sviluppo, le due paia di piedi del 7° segmento si riducono in tal modo che *tutti gli articoli* diminuiscono di diametro e di lunghezza (fig. 2-3), finchè si arriva ad uno

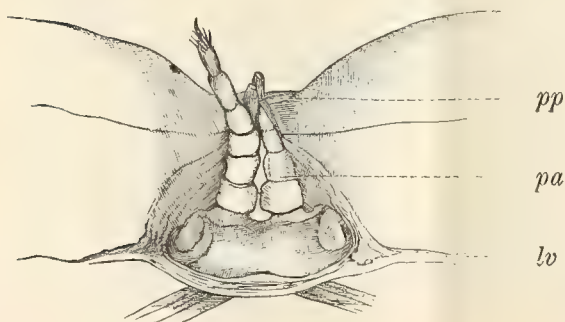
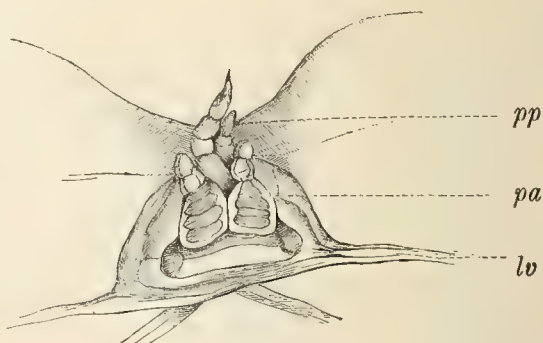



Fig. 2. Fig. 3.

stadio, in cui questi piedi si presentano come appendici coniche (fig. 4) apparentemente non segmentate, mentre in realtà possiamo ancora distinguervi tracce di tutti gli articoli, che componevano il piede normale.

In uno stadio ulteriore non si osserva più, o quasi, segmentazione, e ciascun paio di piedi è ridotto a due corte appendici, dalle quali evidentemente sorge l'organo copulativo; ma prima di ammettere in modo assoluto questa singolare trasformazione ho creduto opportuno di ricorrere anche alle sezioni, ed in un prossimo lavoro saranno fatti noti i risultati.

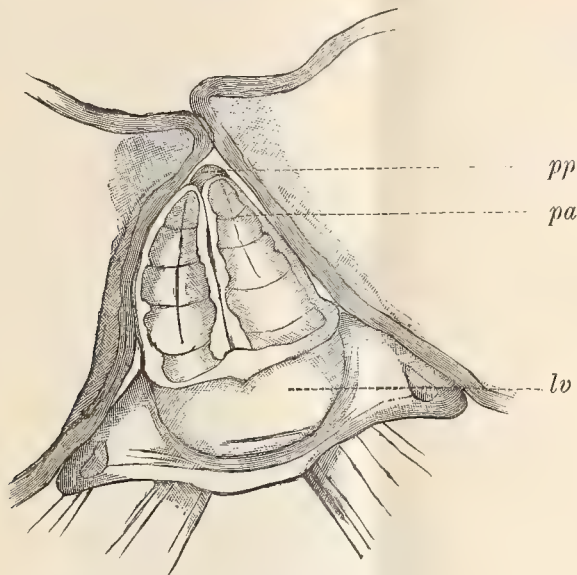



Fig. 4.

Concludendo, i fatti nuovi da me esposti sono i seguenti:

1) Nel *Lysiopetalum foetidissimum* (Savi) (e probabilmente quindi in altre specie) il 2° paio di piedi nella ♀ si riduce enormemente.

2) Nel *Pachyiulus communis* (Savi) (e probabilmente in tutti quei Diplopodi nei quali si ha sviluppo diretto) i piedi interi si riducono, senza che cadano affatto degli articoli; i piedi così ridotti formano il punto di partenza della formazione dell'organo copulativo.

II.

Le glandole sericee nei Diplopodi.

Prima il Waga descrisse il bozzolo, che tesse una specie di *Craspedosoma* per compiervi la muta; più tardi il Fanzago descrisse quello di *Lysiopetalum foetidissimum* (Savi), Latzel quello di *Craspedosoma*, Cook quello di *Cleidogona*, Verhoeff quello di alcune specie di *Cordeumatidae* s. l. (non indica di quale specie), ed io stesso ho esaminato quello di *Atractosoma Cecconii*, Silv.

Si sapeva quindi che i *Coelocheta* possedevano delle glandole capaci di secernere una sostanza sericea.

Dove fossero queste glandole e come fossero, nessuno però conosceva fino al tempo in cui O. von Rath avvertì la loro presenza nei *Craspedosoma* e le descrisse brevemente in una Nota del suo lavoro *Zur Biologie der Diplopoden.*

Io, lasciando di parlare della fine struttura di tali glandole in un'altra Nota, dirò: che le ho riscontrate in tutti i *Craspedosomatidae* giovani ♂ e ♀, che nei ♂ *adulti* esse si atrofizzano, mentre nelle ♀ *adulte* raggiungono il massimo loro sviluppo; 2° le ho riscontrate nei *Lysiopetalum* giovani ben sviluppate, in tutti gli individui *adulti* ♂ e ♀ invece affatto atrofizzate.

Si poteva quindi concludere che le glandole sericee nei *Coelocheta* giovani servissero a tessere il bozzolo per compiervi la muta e che nelle ♀ adulte di *Craspedosoma* dovessero avere qualche altro ufficio. Le osservazioni già fatte avevano provato la verità della prima parte di questa conclusione, ed una mia nuova osservazione prova l'esattezza anche della seconda parte.

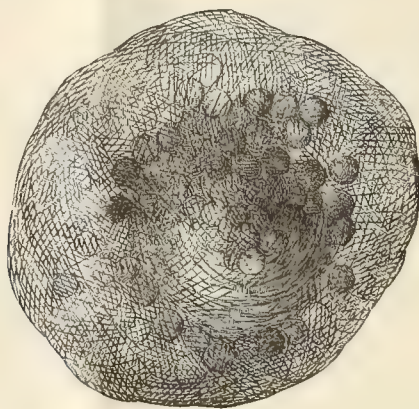



Fig. 5.

Le femmine di *Craspedosoma* tessono un nido (fig. 5), cui affidano le loro uova. Questo nido esse compongono sopra la superficie inferiore di sassi o di pezzi di legno, che trovansi nelle località da esse predilette.

Tale nido è di forma rotondeggiante; nella parte su cui poggia, è costituito da pochi strati di fili, mentre nella superficie libera risulta composto di molti strati di fili intrecciantisi tra di loro in tutti i sensi; nel mezzo sono comprese le uova. Per costruirlo, l'animaletto scelto il luogo opportuno, stende su di esso un fine straterello di fili, indi depone in mezzo le uova, e procede a ricoprirle di un denso strato di fili.

Le glandole sericee (fig. 6) nei *Coelocheta* sono pari e si estendono dall'ultimo segmento, ove hanno lo sbocco per mezzo di due papille, fino oltre la valvola pilorica.

Nei *Monocheta* esistono all'ultimo segmento quattro papille, apparentemente assai simili a quelle dei *Coelocheta*, ed è quindi assai probabile anche in questi la presenza di glandole sericee.

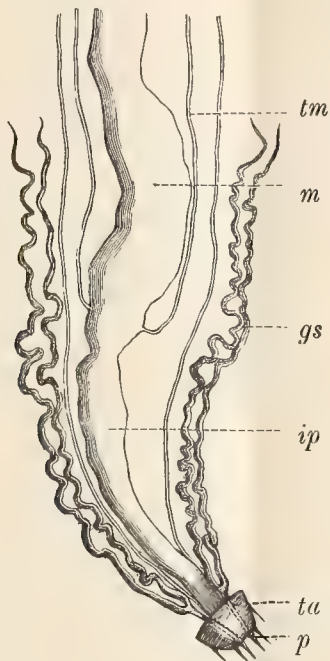



Fig. 6.

Concludendo i nuovi fatti da me osservati sono i seguenti:

1) Nei *Craspedosomatidae* ♂ adulti le glandole sericee sono atrofizzate.

2) Nei *Craspedosomatidae* ♀ adulti tali glandole raggiungono il massimo sviluppo, e servono a tessere un nido per custodire le uova (il nido dei *Craspedosomatidae* era fino ad ora sconosciuto).

3) Nei *Lysiopetalidae* ♂ e ♀ adulti tali glandole sono atrofizzate.

4) Voglio da ultimo richiamare l'attenzione sul valore che tali glandole hanno per la filogenia dei *Diplopodi* e dei *Simphili*, sapendosi che anche in questi ultimi esistono delle glandole sericee nella stessa posizione.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

Fig. 1. — Parte terminale dell'ovario di *Lysiopetalum foetidissimum: ov.* ovidotto, *rps.* rudimenti del 2° paio di piedi.

Fig. 2. — Parte ventrale del 7° segmento di un ♂ di *Pachyiulus communis: lv.* lamina ventrale *pa.* 1° paio di piedi, *pp.* 2° paio di piedi.

Fig. 3-4. — Idem.

Fig. 5. — Nido di *Craspedosoma mevaniense*, Silv.

Fig. 6. — *Craspedosoma mevaniense: m.* intestino medio, *ip.* intestino posteriore, *tm.* tubi malpighiani, *gs.* glandole sericee, *ta.* ultimo tergite, *p.* papilla.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente Messedaglia dà il doloroso annuncio della perdita fatta dalla Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, nella persona del Socio nazionale Pacifico Barilari, mancato ai vivi il 7 gennaio 1898, e commemora il defunto Socio, colle seguenti parole:

« L'ing. Pacifico Barilari era nato a Pesaro nel 1813, e contava ormai fra i più anziani della nostra Accademia, essendovi entrato nel 1873.

« Nè io starò qui a parlare distintamente (anche per difetto in me della necessaria competenza ed autorità) dei segnalati meriti di lui nel campo generale dell' ingegneria, e in quello più specialmente dell' idraulica, dove aveasi incontestabilmente a maestro.

« Allievo dell' illustre Brighenti, e degno continuatore della grande tradizione tecnica del Cavalieri e del Paleocapa, già chiaro qual egli era per i suoi lavori intorno al Po ed al Reno nelle Romagne, veniva nel 1860 chiamato a Torino, per iniziativa dello stesso Paleocapa, nell' ufficio di Ispettore del Genio civile; e dipoi, qui in Roma, per molti anni, sedette a Presidente del Consiglio superiore dei lavori pubblici.

« E può ben dirsi non esservi quasi grande opera di costruzioni nel Regno, alla quale egli non abbia efficacemente coadiuvato colla propria scienza ed esperienza.

« E non meno apprezzato anche all' estero, era stato eletto nel 1879 a Presidente della commissione internazionale per la difesa idraulica della città di Szegedino in Ungheria, in seguito alla tremenda inondazione che l'avea devastata ».

P. B.

// RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

ADUNANZA GENERALE DELLE DUE CLASSI

del 6 febbraio 1898.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sulla distribuzione in latitudine dei fenomeni solari osservati al R. Osservatorio del Collegio Romano durante il 4° trimestre del 1897.* Nota del Socio P. TACCHINI.

Ho l'onore di presentare all'Accademia i risultati riguardanti la distribuzione in latitudine dei fenomeni solari osservati nel 4° trimestre del 1897. La stagione non fu molto favorevole specialmente per le osservazioni spettroscopiche, e i dati raccolti nella seguente tabella furono ricavati dalle latitudini da me determinate per 238 protuberanze, 140 gruppi di facole e 36 di macchie.

Anche in questo trimestre le protuberanze solari furono più frequenti nelle zone australi; però la differenza nei due emisferi è ben più piccola, che nella precedente serie. Le protuberanze furono sempre abbastanza frequenti dall'equatore fino a ± 60 gradi come nel precedente trimestre. Sono da rimarcarsi, come nella serie relativa al 3° trimestre, i due massimi di frequenza presso alle latitudini di ± 60°.

La frequenza delle facole risulta, come per le protuberanze, qualche poco maggiore nelle zone australi del sole. Le facole non oltrepassarono i paralleli di ± 50° come nel trimestre precedente, e furono sempre abbastanza frequenti dall'equatore fino a ± 30° col loro massimo nella zona equatoriale fra ± 10°, mentre i massimi delle protuberanze avvennero a latitudini più elevate.

4° trimestre.

1897 Latitudine	Protuberanze Frequenza relativa		Facole Frequenza relativa		Macchie Frequenza relativa	
90°-+-80°	0,008					
80-+-70	0,004					
70-+-60	0,020					
60-+-50	0,096					
50-+-40	0,076	0,448	0,004			
40-+-30	0,044		0,017			
30-+-20	0,080		0,054	0,480		
20-+-10	0,072		0,161		0,162	0,676
10 . 0	0,048		0,244		0,514	
0 — 10	0,104		0,219		0,243	0,324
10 — 20	0,120		0,198		0,081	
20 — 30	0,100		0,095	0,520		
30 — 40	0,032		0,004			
40 — 50	0,044	0,552	0,004			
50 — 60	0,132					
60 — 70	0,016					
70 — 80	0,004					
80 — 90	0,000					

Le macchie si contennero nella zona equatoriale fra + 20° e — 20° come nel precedente trimestre e furono più frequenti al nord dell'equatore col massimo fra l'equatore e il parallelo 10°.

In ottobre e in dicembre nessuna eruzione fu osservata, e solo in novembre, il giorno 23, osservai un getto alla latitudine di + 8°,2 sul bordo occidentale, alla cui base si videro invertite le $b^1b^2b^3$ e la 1474 . K, oltrechè la D^3 era vivissima in quella posizione. Detto getto apparve d'improvviso raggiungendo l'altezza di 168″ alle 14^h 43^m ed abbassandosi dopo poco per volta, così che alle 15^h era del tutto scomparso.

Botanica. — *Sull' origine degli elementi vascolari nell' apice vegetativo della radice delle Monocotiledoni.* Nota preventiva del Corrispondente R. Pirotta e del dott. L. Buscalioni.

Se numerose sono le ricerche eseguite intorno alla costituzione istologica dell'apice vegetativo della radice delle piante Monocotiledoni e molto fu fatto fino ad oggidì intorno agli istogeni che si riscontrano nell'apice della radice stessa ed anche sulle iniziali che danno origine agli istogeni medesimi, se moltissimo si è fatto intorno alla struttura della radice adulta delle Monocotiledoni stesse, ben poco si conosce, e sempre assai incompletamente, sulla

prima origine e immediata differenziazione degli elementi vascolari, comprendendo, per brevità, sotto questa denominazione i tubi cribrosi, i vasi o trachee ed i tracheidi. Si sono di solito applicate alla radice delle Monocotiledoni le teorie dedotte dallo studio dei fasci collaterali del caule condotto specialmente nelle Dicotiledoni. Ma questa applicazione non è, nella sua generalità almeno, possibile, anzi nella maggioranza dei casi pare a noi inesatta.

È perciò che riunendo insieme e completando le ricerche già da noi fatte al riguardo, abbiamo voluto contribuire allo studio di questa questione e ci sembra di aver potuto constatare e stabilire alcuni fatti importanti, che esporremo con tutti i particolari in un lavoro di prossima pubblicazione. Vogliamo intanto brevemente riassumere alcuni di questi fatti nella presente comunicazione preventiva.

Nella radice delle Monocotiledoni è quasi sempre ben distinto dagli altri istogeni dell'apice vegetativo il pleroma, che differenziandosi darà origine al cilindro centrale della radice stessa ed ai tessuti definitivi che lo costituiscono, cioè al tessuto fondamentale che forma la massa principale e che si differenzia generalmente in pericambio alla periferia ed in parenchima centrale. Dentro alla massa del tessuto fondamentale stanno gli elementi vascolari o isolati o riuniti in gruppi o serie, che sono generalmente ritenuti fasci semplici, cribrosi e vascolari, disposti in cerchia verso la periferia del cilindro centrale, alternanti regolarmente in numero eguale e separati l'uno dall'altro dal tessuto fondamentale.

Si ritiene generalmente che tutti gli elementi vascolari appartengano al fascio o raggio vascolare e tutti gli elementi cribrosi al fascio o cordone cribroso e tutt'al più, se qualcuno di questi elementi si trovano isolati o appaiati nella massa del tessuto fondamentale centrale, si parla di anomalie di struttura delle radici od ancora della presenza di un metaxilema.

Si ammette inoltre generalmente che nelle radici delle Monocotiledoni gli elementi del raggio vascolare come quelli del cordone cribroso provengono da un fascio procambiale, cioè da un meristema derivato da quello primario che forma il pleroma, e che lo sviluppo successivo dei diversi elementi vascolari sia, tanto nel cordone cribroso quanto nel raggio vascolare, centripeto, cioè avvenga in direzione dalla periferia al centro del cilindro centrale.

Ora nel maggior numero delle piante da noi esaminate abbiamo potuto constatare che gli elementi cribrosi non si differenziano da un vero e proprio cordone procambiale, ma direttamente da quella parte dello strato esterno del pleroma, che si mantiene in attiva segmentazione e colle cellule ricchissime di contenuto, che sta immediatamente di contro all'endodermide e che differenzia rapidamente nella o nelle sue serie più esterne il pericambio. L'origine degli elementi stessi è centripeta, ma i primi a formarsi, i più giovani e più esterni, come osservava testè anche il Chauveaud, provengono da una cellula madre che si segmenta e dà oltre al tubo cribroso anche cellule an-

nesse, mentre i successivi provengono da diretta trasformazione di una cellula del mesistema.

Per quanto riguarda gli elementi vascolari propriamente detti, essi, nelle radici laterali da noi studiate, hanno origine sempre diretta, cioè dalla differenziazione di una cellula o di una serie di cellule del meristema. Non provengono dunque mai da un vero e proprio cordone procambiale. Essi si possono formare generalmente in tutta l' estensione del tessuto fondamentale, ed i primi di essi a differenziarsi sono gli interni e quando ve ne è uno assile, è questo il primo di tutti a comparire. Poi si differenziano mano mano quelli esterni ed in direzione centrifuga, cioè dal centro alla periferia. Gli ultimi a formarsi, contrariamente a quanto si è fino ad ora ammesso, sono i periferici, cioè quelli più esterni, che stanno di regola immediatamente contro il periciclo.

I vasi interni sono i più grandi e stanno spesso isolati nell' asse o nella porzione centrale o riuniti a due o più; talvolta disposti più o meno regolarmente a raggi od a cerchia. Gli esterni mano mano più piccoli sono invece di regola disposti in serie radiali, corrispondenti ai raggi vascolari della maggioranza degli anatomici.

I vasi centrali ed i più interni, quelli cioè di regola non disposti a raggio, si differenziano già in vicinanza delle iniziali del pleroma, dalle quali sembrano talvolta provenire direttamente; i vasi che man mano seguono verso l' esterno si differenziano ad una maggiore distanza dalle iniziali medesime; i più esterni, quelli cioè disposti di regola a raggio, si differenziano dallo strato più esterno del pleroma che sta al di sotto del pericambio e che forma come un mantello di cellule in attiva segmentazione.

Di questi elementi, però, quelli che prima e più intensamente si lignificano e ispessiscono le loro pareti sono i più esterni e più piccoli, e questa è probabilmente la ragione per la quale, non ricorrendo come noi abbiamo fatto alle sezioni in serie continua ininterotta, gli altri osservatori hanno creduto fossero i primi a differenziarsi.

L' apice vegetativo della radice delle piante Monocotiledoni dunque, per quanto riguarda l' origine e la differenziazione degli elementi vascolari dal meristema del pleroma pare si comporti in modo speciale, offre cioè un carattere che unito agli altri non pochi anatomici e morfologici fa sempre più spiccare il distacco di questa serie di vegetali da quella delle Dicotiledoni.

Matematica. — *Sopra i divisori normali d'indice primo di un gruppo finito.* Nota del dott. G. Bagnera, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

1. In alcune questioni che mi sono proposto, riguardanti la composizione dei gruppi finiti, ho avuto spesso bisogno di sapere il numero dei divisori normali di un dato indice primo p, contenuti in un gruppo finito G, nell' ipotesi che il gruppo G possegga divisori normali di detto indice.

Se ν è il numero di tali divisori, io ho dimostrato che esso è della forma

$$\frac{p^r-1}{p-1};$$

inoltre, ho fatto vedere che il gruppo G è allora isomorfo, almeno meriedricamente, ad un gruppo commutativo di grado p^r che ha tutti gl' invarianti eguali a p.

Questi risultati mi sembrano non privi d' interesse perchè, in alcuni casi importanti, sono di grande ausilio nella trattazione del difficilissimo problema enunciato dal Cayley [1], quello, cioè, di trovare tutti i possibili gruppi di un dato grado n; sicchè, non credo inutile esporre qui l' analisi di cui mi son servito per stabilirli, tanto più che essa è molto semplice per chi è familiare con la teoria dei gruppi finiti.

2. Sia G un tale gruppo il quale possegga r divisori normali distinti di indice primo p: $G_1, G_2, \dots, G_r$. Dico che la loro intersezione ha, in G, un indice che è un divisore di p^r. Infatti, G_1 e G_2 sono due divisori normali massimi distinti di G e quindi, come è noto [2], la loro intersezione $[G_1, G_2]$ ha, in G_1, lo stesso indice che G_2 ha in G, cioè p; dunque, $[G_1, G_2]$ ha, in G, l' indice p^2. Se i gruppi $G_3, G_4, \dots G_r$ ammettono il divisore $[G_1, G_2]$, allora, l' intersezione $[G_1, G_2, G_3, \dots, G_r]$ coincide con $[G_1, G_2]$; diversamente, uno di essi, G_3, non avrà detto divisore. In questo caso, $[G_1, G_2]$ e $[G_1, G_3]$ sono due divisori normali distinti di G_1, d' indice p, quindi la loro intersezione $[G_1, G_2, G_3]$ ha l' indice p in $[G_1, G_2]$ e l' indice p^3 in G. Se i gruppi $G_4, \dots, G_r$ ammettono il divisore $[G_1, G_2, G_3]$, allora l' intersezione $[G_1, G_2, G_3, \dots, G_r]$ coincide con $[G_1, G_2, G_3]$; diversamente, uno di essi, G_4, non avrà detto divisore. In questo caso, $[G_1, G_2, G_3]$ e $[G_1, G_2, G_4]$

(1) Nell' American Journal of Mathematics, vol. I, pag. 50.

(2) H. Weber, Lehrbuch der Algebra, vol. II, pag. 22.

sono due divisori normali distinti di $[G_1, G_2]$ d'indice p, quindi la loro intersezione $[G_1, G_2, G_3, G_4]$ ha l'indice p in $[G_1, G_2, G_3]$ e l'indice p^4 in G.

Continuando a ragionare in questo modo, si conclude che l'indice di $[G_1, G_2, \ldots, G_r]$, in G, è p^λ, essendo $1 \leq \lambda \leq r$; inoltre, se $\lambda < r$, l'intersezione dei divisori $G_1, G_2, \ldots G_r$ coincide con l'intersezione di λ di essi convenientemente scelti.

Ciò posto, chiamo i divisori $G_1, G_2, \ldots, G_r$ *indipendenti* se è $\lambda = r$, in altri termini, se la loro intersezione ha, nel gruppo principale G, precisamente l'indice p^r.

Due divisori normali distinti, d'indice p, sono sempre indipendenti. Se più divisori normali d'indice p, $G_1, G_2, \ldots, G_r$, sono indipendenti, una parte qualunque di essi sono indipendenti. Infatti, se, essendo $s < r$, l'indice di $[G_1, G_2, \ldots, G_s]$, in G, non è p^s, si possono scegliere $\lambda < s$ divisori, $G_1, G_2, \ldots, G_\lambda$, in modo che

$$[G_1, G_2, \ldots, G_\lambda] = [G_1, G_2, \ldots, G_s];$$

allora, essendo

$$[G_1, G_2, \ldots, G_\lambda, G_{s+1}, \ldots, G_r] = [G_1, G_2, \ldots, G_s, G_{s+1}, \ldots, G_r],$$

l'indice di $[G_1, G_2, \ldots, G_r]$, in G, sarà un divisore di $p^{r+\lambda-s}$ e quindi inferiore a p^r.

3. Chiamo, per brevità, T l'intersezione di r divisori normali indipendenti, $G_1, G_2, \ldots, G_r$, d'indice p rispetto ad un gruppo finito G. Dico che il gruppo complementare a T, in G, che è di grado p^r e che denoto, secondo l'uso, col simbolo G/T, ha tutti i suoi elementi di grado p.

Se a è un elemento qualunque di G non contenuto nel divisore normale T, aT sarà un elemento di G/T diverso dall'elemento unitario T, e giacchè si ha

$$(aT)^p = a^p T,$$

basta far vedere che a^p appartiene a T. Ora, a^p appartiene a ciascuno dei gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_r$, perchè $aG_1, aG_2, \ldots, aG_r$ sono elementi dei rispettivi gruppi complementari in G, i quali gruppi hanno il grado comune p; dunque, a^p appartiene a

$$T = [G_1, G_2, \ldots, G_r].$$

Dippiù, il gruppo G/T è commutativo (Abeliano). Ciò è vero per $r = 1$ ed $r = 2$, perchè ogni gruppo di grado p o di grado p^2 (1) è commutativo; quindi, suppongo che il fatto si verifichi quando il numero dei divisori normali indipendenti d'indice p è inferiore ad r e dimostro che si verifica ancora allorchè detto numero è r.

(1) Netto, *Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra,* 1882, pag. 133.

I gruppi $[G_1, G_2], [G_1, G_3], \dots, [G_1, G_r]$ sono $r-1$ divisori normali di G_1 d'indice p e sono indipendenti, perchè la loro intersezione T ha in G_1 l'indice p^{r-1}; dunque, il gruppo G_1/T, che è un divisore normale d'indice p di G/T, è commutativo per ipotesi. Il gruppo

$$N = [G_2, G_3, \dots, G_r],$$

che è d'indice p^{r-1} in G, non è contenuto in G_1, perchè $G_1, G_2, \dots, G_r$ sono, per ipotesi, indipendenti e quindi G_1/T non contiene il gruppo ciclico, di grado p, N/T.

Ciò posto, dato un elemento qualunque E di G/T, si può, in una maniera sola, scegliere un elemento A di N/T ed un elemento B di G_1/T in modo che sia

$$E = A.B;$$

dunque, per dimostrare che il gruppo G/T è commutativo, basta provare che ogni elemento A di N/T è permutabile con ogni elemento B di G_1/T. Ora, giacchè N/T è un divisore normale ciclico di G/T, si deve avere

$$B^{-1}AB = A^{\alpha},$$

donde

$$B^{-p}AB^{p} = A^{\alpha^p},$$

ed essendo B un elemento di grado p, sarà

$$\alpha^p - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

D'altronde, per il teorema di Fermat, è

$$\alpha^p - \alpha \equiv 0 \pmod{p};$$

quindi,

$$\alpha \equiv 1 \pmod{p}$$

e conseguentemente

$$AB = BA.$$

4. Se r è il massimo numero di divisori normali indipendenti d'indice p che possiede il gruppo G, allora qualsiasi divisore normale di G di tale indice contiene T, ed il rispettivo gruppo complementare di T, in detto divisore, è un sottogruppo di G/T di grado p^{r-1}; dunque, il numero dei divisori normali d'indice p di G è lo stesso del numero dei divisori di grado p^{r-1} di G/T.

M'interessa quindi sapere, più generalmente, il numero dei divisori di grado p^{λ} di un gruppo Abeliano di grado p^r che ha tutti i suoi invarianti eguali a p.

Io considero un elemento E diverso dall' unità di un tale gruppo e penso al gruppo ciclico di grado p formato dalle potenze di E; poi, prendendo un altro elemento E_1 fuori di detto gruppo ciclico, penso al gruppo formato dalle potenze di E_1; .... e così continuo fino ad esaurire i $p^r - 1$ elementi, diversi dall' unità, contenuti nel gruppo dato. Dal momento che ognuno di detti gruppi ciclici contiene soltanto $p - 1$ di tali elementi, concludo che il numero dei divisori di grado p è

$$\nu_1 = \frac{p^r - 1}{p - 1}.$$

Per trovare il numero ν_2 dei divisori di grado p^2 considero tutti quelli che hanno uno stesso divisore di grado p, il cui numero è quello dei sottogruppi di grado p che possiede il gruppo complementare di detto divisore, cioè $\frac{p^{r-1} - 1}{p - 1}$: ottengo così $\frac{p^r - 1}{p - 1} \cdot \frac{p^{r-1} - 1}{p - 1}$ divisori di grado p^2; ma ognuno, giacchè ha $\frac{p^2 - 1}{p - 1}$ divisori di grado p, viene ad essere contato precisamente $\frac{p^2 - 1}{p - 1}$ volte; quindi,

$$\nu_2 = \frac{(p^r - 1)(p^{r-1} - 1)}{(p - 1)(p^2 - 1)}.$$

Il ragionamento porta subito alla formola

$$\nu_\lambda = \frac{(p^r - 1)(p^{r-1} - 1) \dots (p^{r-\lambda+1} - 1)}{(p - 1)(p^2 - 1) \dots (p^\lambda - 1)},$$

dove, ponendo $\lambda = r - 1$, si ottiene il numero

$$\nu_{r-1} = \frac{p^r - 1}{p - 1},$$

il quale coincide, per quello che si è detto, col numero ν dei divisori normali d' indice p di G.

5. Termino col fare un' applicazione dei risultati precedenti alla composizione di un gruppo P, il cui grado è una potenza p^k di un numero primo p. Per un teorema dovuto a Sylow [1], un tale gruppo ha certamente dei divisori d' indice p, e si può ancora asserire che qualunque divisore di detto indice è normale [2].

Ciò posto, sia G un divisore normale di P, e si pensino tutti i ν divisori del gruppo G, che hanno l' indice p rispetto a questo gruppo: essi,

(1) H. Weber, Lehrbuch der Algebra, vol. II, pag. 122.
(2) H. Weber, l. c, pag. 128.

come si è detto, sono normali in G, ed io aggiungo che ne esiste almeno uno che è normale anche in P. Infatti, se G_1 è un divisore di G d'indice p, che non è normale in P, il numero dei suoi trasformati distinti è uguale all'indice, in P, del gruppo formato dagli elementi di P invertibili con G_1, e, siccome questo gruppo non coincide con P, detto numero è un multiplo di p. Allora, tutti i trasformati di G_1, non possono esaurire i ν divisori di G considerati, perchè, da quello che ho già stabilito, risulta che

$$\nu \equiv 1 \pmod{p};$$

quindi, esisterà almeno un divisore di G, d'indice p, che non è un trasformato di G_1 in P. Se questo nuovo divisore non è normale in P, tutti i suoi trasformati distinti, il cui numero è multiplo di p, non esauriscono ancora i ν divisori di G considerati; e continuando in tale modo, debbo necessariamente essere arrestato dalla presenza di un divisore d'indice p in G e normale in P.

Sia ora P_1 un divisore d'indice p del gruppo P. Tra i divisori di P_1, d'indice p, ve ne sono di quelli che sono normali in P e sia P_2 uno di questi; poi, tra i divisori di P_2, d'indice p, ve ne sono di quelli che sono normali in P e sia P_3 uno di questi;.... così procedendo, si vede che è possibile costruire una *serie di composizione* del gruppo P:

$$P, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{k-1}$$

tale che, ogni gruppo della serie, è divisore normale di tutti quelli che lo precedono.

Io chiamo, brevemente, una tale serie una *serie canonica di composizione* e mi riservo di ritornare fra breve su questo argomento.

Fisica. — *Sulla diffusione dei raggi Röntgen.* Nota dei dottori R. MALAGOLI e C. BONACINI, presentata dal Socio BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre — *Sulla velocità di propagazione del terremoto d'Aidin* (Asia M.) *del 19 agosto 1895.* Nota di G. AGAMENNONE, presentata dal Socio P. TACCHINI.

L'interesse che presenta lo studio della velocità, con cui si propagano le onde sismiche, va crescendo ogni dì più, a causa delle importanti questioni sulla costituzione interna del nostro globo che si riattaccano a tale studio. Oggi più che mai simili ricerche sono feconde in risultati, grazie ai moderni strumenti ben superiori agli antichi, vuoi per una più esatta determinazione

del tempo, vuoi per una maggiore sensibilità che permette ai medesimi di registrare il terremoto anche a distanze ragguardevolissime dall' epicentro.

In questi stessi Rendiconti furono a suo tempo pubblicati i risultati da me ottenuti studiando la propagazione delle due scosse di terremoto avvenute in Grecia il 19 e 20 settembre 1867, della celebre scossa d'Andalusia del 25 dicembre 1884 e finalmente di varie scosse verificatesi nell' isola di Zante durante l' anno 1893 e per le quali si potè conoscere con una qualche precisione l' ora dell' avvenimento sia all' epicentro che nei dintorni.

L' esperienza degli ultimi anni ci ha dimostrato come una gran parte delle perturbazioni di carattere sismico, registrate dagli strumenti degli osservatorî d' Europa ed in particolar modo di quelli italiani, sono dovute a terremoti scoppiati qua e là in Oriente, a cominciare dalla Grecia ed a finire al Giappone. Ma all' eccezione di quest' ultima contrada, dove esiste già da molti anni un regolare servizio sismico, per tutte le altre, disgraziatamente, non si ha quasi mai modo di ottenere l' ora della scossa con quella precisione che sarebbe necessaria [1].

Profittando del mio soggiorno a Costantinopoli durante il biennio 1895-96, io ho cercato, per quanto mi è stato possibile, di colmare siffatta lacuna per molti dei principali terremoti, avvenuti nell' Impero Ottomano in questo spazio di tempo, ed ho voluto anche calcolare la loro velocità di propagazione tutte le volte che l' ho potuto fare con qualche speranza di buon successo. È così che io ho potuto studiare la propagazione della scossa di *Paramythia* (Epiro) del 13-14 maggio 1895 [2], quella d' *Usun-Ada* (sulla costa orientale del M. Caspio) della notte 8-9 luglio 1895 [3], di *Salonicco* del 2 dicembre 1895 [4], e quella d'*Amed* (Asia M.) del 16 aprile 1896 [5].

Man mano che ne avrò tempo, ho intenzione di estendere simili ricerche anche a parecchi altri terremoti di qualche importanza avvenuti in Oriente, e per i quali posseggo i dati a ciò necessarî.

Oggi mi propongo di far conoscere per sommi capi i risultati a' quali sono pervenuto studiando la velocità di propagazione del terremoto d'Aidin

[1] Per non parlare di tanti altri terremoti, un bell' esempio di ciò si è avuto recentemente in quello di Kishm (Golfo Persico) del 10 gennaio 1897, la cui relazione si trova nel Boll. della Soc. Sismologica Italiana, vol. III, (1897), pag. 49.

[2] *Vitesse de propagation du tremblement de terre de Paramythia* (Epire) *dans la nuit 13-14 mai 1895*. Boll. della Soc. Sism. Ital., vol. II, (1896), pag. 3.

[3] *Tremblement de terre de la Mer Caspienne de la nuit 8-9 juillet 1895*. Bull. Mét. et Séism. de l'Obs. Imp. de Constantinople. Partie séismique pour l' an 1895, pag. XXXVIII-XL.

[4] *Tremblement de terre de Salonique du 2 décembre 1895*. Id., pag. LXV-LXVI.

[5] *Vitesse de propagation du tremblement de terre d'Amed* (Asie M.) *du 16 avril 1896*. Boll. della Soc. Sism. Ital., vol. II, (1896), pag. 233.

(Asia M.) del 19 agosto 1895, del quale ho già dato un' estesa relazione nei *Beiträge zur Geophysik* del prof. dott. G. Gerland di Strasburgo, (vol. III, fasc. 3, Leipzig, 1897).

Il movimento fu più intenso lungo la valle del Meandro e raggiunse il grado IX-X della scala convezionale *De Rossi-Forel* all' epicentro, situato un po' ad oriente della città d'Aidin ed avente le seguenti coordinate geografiche:

lat. N. 37° 51′; long. 27° 55′ E Greenwich.

L' area più fortemente scossa, in cui si verificarono la maggior parte dei guasti, fu di circa 800 km. q. e presentò una forma grossolanamente ellittica coll'asse maggiore di circa 50 km. lungo la valle del Meandro e con quello minore di una ventina di km. La violenza dell' urto fu tale che il movimento si risentì abbastanza sensibile lungo la costa occidentale dell'Asia M., si propagò verso il nord e verso il sud ad un centinaio di chilometri dall' epicentro e perfino ad una distanza doppia verso l' est. Le onde sismiche, generate da tanta commozione, non mancarono dall' arrivare in Europa, perturbandovi il *microsismografo* di Padova ed il *pendolo orizzontale* di Strasburgo, che pur distano dall' epicentro da 1500 a 2000 km.

Le ore, provenienti dall' Asia M., una ventina in tutto, lasciano generalmente a desiderare dal lato della precisione, quantunque la maggior parte siano state fornite dagli uffici telegrafici. Non è dunque il caso di volere utilizzare tali ore per procedere ad un calcolo della velocità di propagazione della scossa, dall' epicentro fino alle località più lontane, dove essa fu più o meno leggermente risentita dall' uomo. Non resta quindi che a scegliere, tra i dati orarî posseduti, quelli che presentino minore incertezza, allo scopo di basarsi sopra di essi per calcolare la velocità media e superficiale delle onde sismiche che dall' Asia M. sono pervenute in Europa. Le ore più attendibili sono, a mio giudizio, quella ($12^h\ 7^m$, t. m. l.) osservata a Smirne dal sig. Purser, direttore della ferrovia da Smirne a Aidin, e l' altra ($12^h\ 6^m$, t. m. Smirne), osservata dal capo-stazione d' Aidin. Il tempo è determinato dal Sig. Purser a Smirne a mezzo d' una meridiana solare ed è trasmesso regolarmente, quasi tutti i giorni, a tutte le stazioni ferroviarie di quella linea. Abbastanza concordante con le due ore precedenti è quella ($12^h\ 5^m$) osservata nei due villaggi di Kiosk ed Aktchè, che si trovano lungo la suddetta ferrovia e che perciò debbono assai probabilmente regolare i loro orologi su quelli delle rispettive stazioni ferroviarie. In base a queste quattro ore, ed attribuendo naturalmente un maggior peso a quelle di Aidin e di Smirne, ho trovato per una distanza media di km. 40 dall' epicentro, l' ora media $12^h\ 13^m, 3$ (t. m. Cost.), la quale è assunta come punto di partenza per il calcolo della velocità con cui si propagarono le onde sismiche in Europa.

Nel microsismografo a registrazione meccanica di Padova la perturbazione cominciò verso le $11^h 20^m$ (t. m. Eur. Centr.), raggiunse il massimo (4 mm.) a $11^h 25^m 16^s$ e cessò completamente a $11^h 37^m$.

Nel pendolo orizzontale a registrazione fotografica di Strasburgo, la perturbazione cominciò a $10^h 59^m 5^s$ (t. m. l.), divenne massima (5 mm.) a $11^h 1^m 23^s$ e cessò a $11^h 15^m 23^s$.

Riducendo tali ore al t. m. Costantinopoli e confrontandole con l' ora media, ottenuta testè per la regione colpita dal terremoto, si ottengono le velocità medie superficiali, consegnate nell' ultima colonna del seguente prospetto:

LOCALITÀ	DISTANZE dell' epicentro	ORE (t. m. Cost.)		VELOCITÀ in m. per secondo	
				principio	massimo
Aidin, Kiosh, Aktché, Smirne	Km. 40		$12^h 13^m,3$		
Padova	" 1570	princ.	" 15,9	9800	
		mass.	" 21,2		3200
Strasburgo	" 2010	princ.	" 23,9	3100	
		mass.	" 26,2		2550

La velocità straordinariamente elevata di quasi 10 km. al secondo, che vien fuori per Padova ed è più che tripla di quella di Strasburgo, quando si consideri il principio della perturbazione, costituisce senza dubbio un fatto che domanda speciale attenzione. Siccome i dati orarî di Padova sono esattissimi, nasce naturalmente il dubbio che tale cifra così alta possa dipendere dall' ora media ($12^h 13^m, 3$) che è stata assunta, per la regione scossa, come base del calcolo. Ed infatti, se questa ora fosse realmente troppo alta — ciò che si potrebbe spiegare per il fatto che in generale l' orologio è consultato, troppo tempo dopo la scossa, da persone non interessate a tal genere di osservazioni, specie se debbono anzitutto provvedere alla loro salvezza quando trattasi di scossa disastrosa — è ovvio che diminuendola di qualche minuto per ridurla, nella predetta ipotesi, al suo vero valore, verrebbe anche a diminuire la velocità ottenuta per Padova. In quest' ordine d' idee, ammettendo che quest' ora dovesse essere abbassata per es. di 3 minuti, cioè ridotta a $12^h 10^m, 3$, in tal caso le velocità che ne verrebbero fuori per Padova e Strasburgo si ridurrebbero alle seguenti:

	Velocità in metri per secondo	
	principio	massimo
Padova. . . .	4550	2340
Strasburgo . .	2410	2100

Se questi nuovi valori ci fanno vedere che la velocità di Padova, relativa al principio della scossa, ha potuto scemare fino a ridursi a men che la

metà della cifra che si era dapprima ottenuta, d' altra parte seguita sempre a sussistere, ed in modo rilevante, la differenza tra Padova e Strasburgo, a far disparire la quale bisognerebbe invocare un errore ancora più forte, e sempre nello stesso senso, per l' ora concernente la regione scossa. Oltre che ciò è poco probabile, v' ha di più che il caso di una velocità straordinariamente alta, come è quella (9800 metri) primitivamente trovata per Padova, non è nuovo. Anche pel terremoto d' Amed di sopra ricordato, s' ebbe ad ottenere una velocità consimile (9450 metri) basandosi sul principio della perturbazione registrata a Padova; e conviene notare che allora non era questione di dubitare dell' ora assunta per la regione scossa, poichè il punto di partenza fu precisamente l' ora sicura osservata a Costantinopoli.

Questo fatto dunque d' una velocità media e superficiale d' una diecina di chilometri al secondo, che vien fuori per le onde sismiche più veloci, anche nel caso che non si propaghino ad una distanza superiore ai 2000 km., merita tutta la nostra attenzione, in ciò che concerne il meccanismo di propagazione del movimento sismico [1]. Ritornando al terremoto d'Aidin, non è improbabile che le onde più veloci, che hanno cominciato a perturbare il microsismografo di Padova, non siano invece state capaci d' influenzare in modo visibile il pendolo orizzontale di Strasburgo e che quest' ultimo abbia cominciato ad essere perturbato soltanto al passaggio di onde sismiche meno veloci, ma meno affievolite o di specie diversa, e verosimilmente quelle stesse che hanno prodotto il massimo di Padova, se si voglia stare alla cifra quasi identica (3100-3200 metri) che si ottiene per la fase massima di Padova e il principio di Strasburgo. Questo fatto mostrerebbe una volta di più quanto bisogna andar cauti, qualora si voglia utilizzare dati orarî provenienti da strumenti dotati di sensibilità diversa o basati sopra principî differenti.

Ammessa la possibilità che le onde sismiche le più veloci possono propagarsi con la velocità considerevolissima di circa 10 km. al secondo, come parrebbe realmente risultare dallo studio dei terremoti d'Aidin e d'Amed, sopra ricordati, nasce spontanea la seguente riflessione:

Nell' ipotesi emessa per la 1ª volta dal Wertheim e recentemente risuscitata dal Cancani [2] che realmente in un terremoto si possano riscontrare

[1] Per potersi spiegare una sì enorme velocità, non v' ha per ora forse altro di meglio che ammettere che la propagazione del movimento si faccia in massima parte a grandi profondità ed in un mezzo eminentemente elastico. Ma su ciò rimando alle idee già svolte nella mia precedente Nota dal titolo: *Sulla variazione della velocità delle onde sismiche colla distanza.* Boll. della Soc Sism. Ital., vol. II, (1896), pag. 161.

[2] *Sulle ondulazioni provenienti da centri sismici lontani.* Ann. dell' Uff. Centr. di Met. e Geod., vol. XV, parte 1ª, 1893, pag. 13.

Intorno ad alcune obbiezioni relative alla velocità di propagazione delle onde sismiche. Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. III, 2° sem., pag. 30; seduta del 1° luglio 1894.

i due sistemi d' onde, le *longitudinali* e le *trasversali*, contemplate nella teoria dell' elasticità d' un mezzo solido indefinito, si dovrebbero ottenere due specie d' onde sismiche caratterizzate dalla proprietà di propagarsi con una velocità ben diversa, e precisamente le più veloci, le longitudinali, con una velocità circa doppia di quelle che lo son meno, ossia le trasversali. In alcune mie Note precedenti [1] inserite in questi stessi Rendiconti, io non mancai di citare fatti ben assodati che contraddicevano a quest' ordine d' idee, e facevano perciò presagire con quanta circospezione bisognasse procedere in questa via. Più tardi, lo stesso Cancani, ha dovuto modificare il suo primitivo modo di vedere [2], intendendo per trasversali non più quelle contemplate nella teoria dei corpi elastici indefiniti, bensì un nuovo genere di movimento che sembra propagarsi alla superficie terrestre con lento periodo d' oscillazione a guisa delle grandi ondate del mare. L' esistenza di questo speciale movimento era già stato da gran tempo sospettata, in seguito alle oscillazioni straordinarie e di carattere lento che si verificavano alle volte nelle livelle astronomiche in coincidenza con qualche importante scossa di terremoto. Ora questa specie d' onde potrebbe benissimo propagarsi con una velocità tutta sua propria e non legata affatto a quella delle longitudinali della teoria, per le quali il Cancani fissa il valore da 4500 a 5000 metri al secondo. Ma per una coincidenza forse casuale, il Cancani seguita sempre ad ammettere, in base a calcoli da lui fatti, che queste ondulazioni, ch' egli persiste a chiamare trasversali, si propaghino alla superficie terrestre con una velocità dai 2000 a 2500 metri, vale a dire metà di quelle longitudinali.

E poichè il principio della perturbazione, prodotta in delicati strumenti a registrazione continua, è causato probabilmente dall' arrivo delle prime onde sismiche, le longitudinali, caratterizzate in generale d' un corto periodo di vibrazione, ed oltre a ciò è sovente possibile riconoscere sui diagrammi l' arrivo del secondo sistema di onde a periodo piuttosto lento, così il Cancani imaginò persino un metodo per calcolare la distanza dell' epicentro dal luogo dell' osservazione, basato unicamente sull' intervallo che decorre tra l' arrivo dei due sistemi d' onde e su i valori delle velocità alle medesime attribuite e che sono dai 4500 ai 5000 metri per le onde più veloci, cioè

(1) *Alcune considerazioni sulla velocità di propagazione delle principali scosse di terremoto di Zante nel 1893.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. III, 1° sem., pag. 389, seduta del 15 aprile 1894.

Sulla variazione della velocità di propagazione dei terremoti attribuita alle onde trasversali e longitudinali. Id., 2° sem., pag. 401, seduta del 16 dicembre 1894.

(2) *Sulle due velocità di propagazione del terremoto di Costantinopoli del 10 luglio 1894.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. III, 2° sem.; seduta del 16 dicembre 1894.

Osservazioni e risultati recenti sulla forma e sul modo di propagarsi delle ondulazioni sismiche. Boll. della Soc. Sism. Ital., vol. II, (1896), pag. 125.

le longitudinali, e dai 2000 ai 2500 per quelle meno veloci, le trasversali, intese nel senso loro attribuito ultimamente dal Cancani.

Ora, poichè in base ai due terremoti d'Aidin e d'Amed, sembra probabile che le onde longitudinali possano marciare anche con una velocità doppia di quella fissata dal Cancani, e per conseguenza quadrupla di quella del secondo sistema d' onde, è da domandarsi quale fiducia possa accordarsi ai risultati ottenuti fin qui, in base al metodo proposto dal Cancani, per calcolare la distanza dal luogo d' osservazione, alla quale si trovi l' epicentro d'una data scossa di terremoto.

Lo studio particolareggiato sulla velocità di propagazione del terremoto d'Aidin, che forma l' oggetto della presente Nota, sarà fra poco pubblicato nei *Beiträge zur Geophysik* del prof. dott. G. Gerland, dove appunto è stata pubblicata la mia relazione su questo importante avvenimento sismico.

Anatomia. *Sul pancreas dei Teleostei.* Nota del dott. MASSARI presentata dal Socio GRASSI.

Zoologia. — *Sul processo di fecondazione nei Diplopodi.* Nota del dott. F. SILVESTRI, presentata dal Socio GRASSI.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

G. AMPOLA e C. ULPIANI. *Sulla denitrificazione.* Presentata dal Socio PATERNÒ.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario BLASERNA presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci DARBOUX, GEGENBAUR, NOETHER, KUEHNE, e dai signori AMODEO e SACCO. Presenta inoltre un *Atlante fotografico della Luna* pubblicato dall'Osservatorio Astronomico di Parigi per cura dei signori LOEWY e PUISEUX.

Il Socio Betocchi fa omaggio della propria pubblicazione avente per titolo: *Narrazione del torneo fatto nella corte di Belvedere in Vaticano, a dì 5 marzo 1565*, e ne discorre.

Il Socio Capellini offre, a nome della contessa Gozzadini Zucchini, il vol. I° delle *Lettere di storia e archeologia a Giovanni Gozzadini* pubblicate da Nerio Malvezzi, con prefazione di Giosuè Carducci e ne parla.

CORRISPONDENZA

Il Socio Cremona dà partecipazione delle condoglianze inviate all'Accademia, per la morte del Presidente Brioschi, dai Soci stranieri Newcomb, Salmon, Reye, e dal *Council of the London Mathematical Society.*

Il Vicepresidente Messedaglia presenta le lettere ed i telegrammi di alcuni Soci, i quali si scusano di non aver potuto intervenire alla seduta.

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La Società Reale di Londra; la Società di scienze naturali di Braunschweig; la Società di scienze naturali di Enden; la Società geologica di Sydney; gli Osservatorî di Edinburgo e di Poulkovo; l'Istituto geodetico di Potsdam; l'Istituto Teyler di Harlem; la Biblioteca Reale di Berlino; l'Università di Upsala.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il R. Istituto di studi superiori di Firenze; le Università di Lund e di Greifswald.

COMITATO SEGRETO

Il Vicepresidente Messedaglia comunica all'Accademia che, in seguito all'incarico avuto nel Comitato segreto dell'adunanza del 16 gennaio 1898, fece pratiche presso gli onorevoli Ministri della Pubblica Istruzione e del Tesoro, al fine di ottenere che volessero mettere a disposizione dell'Accademia un fondo per adire all'asta della Biblioteca Boncompagni. E aggiunge che con piena soddisfazione sua e della Presidenza, queste pratiche sono riuscite, perchè S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione assegnò 3 mila lire, e 5 mila ne dette S. E. il Ministro del Tesoro, in modo che l'Accademia potè già tornare in possesso di alcuni importantissimi documenti degli antichi Lincei, e potrà ulteriormente aspirare a qualche altro acquisto, nei limiti dell'anzidetta somma di cui rimase ancora qualche parte disponibile.

L'Accademia delibera unanime d' inviare i propri ringraziamenti agli onorevoli Ministri della Pubblica Istruzione e del Tesoro, per questo atto di generosa largizione.

Il Vicepresidente MESSEDAGLIA dà comunicazione di una lettera colla quale il Socio TOMMASINI si dimette, per ragioni di salute, dall' ufficio di Amministratore.

L' Accademia, accettando le dimissioni del Socio Tommasini delibera di provvedere alla nomina del nuovo Amministratore, dopo che sarà stata fatta l' elezione del Presidente.

L' Accademia procede poscia alla elezione del Presidente, che prenderà il posto del compianto FRANCESCO BRIOSCHI fino a Giugno 1900.

Lo spoglio dei voti fatto dai Soci scrutatori DINI e TOMMASINI, dà il risultato seguente:

Votanti 47 — BELTRAMI 43; CREMONA 1; schede bianche 3. — Eletto BELTRAMI.

Questa nomina, a termini dell' art. 15 dello Statuto accademico, sarà sottoposta all' approvazione di S. M. il Re.

Il Vicepresidente MESSEDAGLIA annuncia che il Socio CERRUTI ha inviato le proprie dimissioni da Amministratore aggiunto, pregando l' Accademia di prenderne atto, ed offrendosi di continuare ancora per qualche tempo nel proprio ufficio, allo scopo di coadiuvare la nuova amministrazione.

L'Accademia, limitandosi a prender cognizione della dimanda di dimissioni del Socio CERRUTI, riserba ogni deliberazione per la prossima seduta plenaria.

Da ultimo, su proposta del Socio MARIOTTI, l'Accademia invia un voto di plauso al suo Vicepresidente senatore MESSEDAGLIA, per l' impegno e la sollecitudine colla quale ha fatto le veci del Presidente dopo la morte del compianto senatore BRIOSCHI.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 febbraio 1898.

Arnaiz R. — Los grandes problemas filósofico-naturales. Nuevas teorias cuya veracidad se demuestra con argumentos rigurosamente lógicos y científicos. San Sebastian, 1897. 8°.

Amodeo F. — Curve *k*-gonali di s^{esima} specie. Napoli, 1897. 4°.

Brough H. — The mining and metallurgical industries of Sweden, as shown at the Stockholm exhibition. London, 1897. 8°.

Calzecchi T. — Le due prime leggi del moto. Osservazioni critiche. Firenze, 1897. 8°.

Darboux G. — Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. T. I. Paris, 1898. 8°.

Faustini A. — Le « Appearances of Land » nella zona polare antartica. Roma, 1898. 8°.

Lanciai G. B. — Teoria elementare dei fenomeni elettrici e magnetici. Vol. I. Torino, 1897. 8°.

Noether M. — James Joseph Sylvester. Leipzig, 1897. 8°.

Ossat A. d'. — Congresso geologico internazionale. VII Sessione 1897, Pietroburgo. Roma, 1897. 8°.

Id. — Sopra l'azione perturbatrice delle masse di ferro (collocate dall'uomo) sugli strumenti magneto-tellurici. Nota II. — Condotti di ferro. Torino, 1897. 8°.

Pickering C. E. — Fifty-second Annual report of the Director of the Astronomical Observatory. Cambridge Mass, 1897. 8°.

Preda A. — Catalogue des algues marines de Livourne. Genève, 1897. 8°.

Id. — Recherches sur le sac embryonnaire de quelques Narcissées. S. l. e a. 8°.

Sacco F. — Contribution à la connaissance paléontologique des argiles écailleuses et des schistes ophiolitiques de l'Appennin septentrional. Bruxelles, 1895. 8°.

Id. — Essai sur l'orogénie de la terre. Torino, 1897. 8°.

Id. — Gli anfiteatri morenici del lago di Como. Torino, 1893. 8°.

Id. — I coccodrilli del Monte Bolca. Torino, 1895. 4°.

Id. — Il delfino pliocenico di Camerano Casasco. Napoli, 1893. 4°.

Id. — Il fenomeno di franamento verificatosi in Piemonte nella primavera del 1892. Torino, 1893. 8°.

Id. — I molluschi dei terreni terziarî del Piemonte e della Liguria, p. XVII-XXIV. Torino, 1895-97. 8°.

Id. — L'anfiteatro morenico del lago di Garda. Torino, 1896. 8°.

Id. — L'apparato morenico del lago d'Iseo. Torino, 1894. 8°.

Id. — L'Appennino settentrionale, p. III. — La Toscana. Roma, 1896. 8°.

Id. — Le genre Bathysiphon à l'état fossile. Paris, 1893. 8°.

Id. — Le Rhinoceros de Dusino. Lyon, 1895. 4°.

Id. — Le trias dans l'Appennin de l'Émilie. Bruxelles, 1893. 8°.

Id. — Le variazioni dei molluschi. Modena, 1894. 8°.

Id. — Les rapports géo-tectoniques entre les Alpes et les Appennins. Bruxelles, 1895. 8°.

Id. — Lo sviluppo glaciale nell'Appennino settentrionale. Torino, 1894. 8°.

Id. — Schema orogenetico dell'Europa. Torino, 1895. 8°.

Id. — Sopra alcuni asteroidei fossili. Torino, 1893. 8°.

Id. — Sur quelques tinoporinae du miocène de Turin. Bruxelles, 1893. 8°.

Sacco F. — Trionici di M. Bolca. Torino, 1894. 8°.

Id. — Trionici di Monteviale. Torino, 1895. 8°.

Severini E. — Di un campanello che suonava da sè o senza cagione apparente. Torino, 1897. 8°.

Stefani A. e *Cavazzani E.* — Quale azione spieghi l'anemia sulle fibre nervose. Ferrara, 1888. 8°.

Trinchera B. — Risposta alle osservazioni fatte dal prof. L. Lanino al nuovo sistema Trinchera per la costruzione delle opere a mare. Napoli, 1898. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Adunanza generale delle due Classi

del 20 febbraio 1898.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica — *Segmenti e numeri transfiniti* [1]. Nota del Corrispondente G. Veronese.

In seguito ad alcune mie affermazioni relative ad una critica obbiettiva del prof. Schoenflies [2], delle quali non avevo dato alcuna prova, egli ha ripetuto in questi Rendiconti con maggiori particolari le sue osservazioni sui miei numeri transfiniti [3]. Mi propongo quindi in questa Nota di dar ragione delle mie affermazioni, e giacchè tratto di questo argomento, dirò anche alla fine qualche cosa intorno al cenno dei miei *Fondamenti di Geometria* [4] fatto di recente dal prof. Klein.

1. La questione del segmento infinitesimo attuale è antica; ma nè i sostenitori nè gli oppositori di tale idea ne hanno mai provata la possibilità o la impossibilità geometrica, perchè essi non hanno posta la questione in modo chiaro e determinato, complicandola anzi talvolta con considerazioni filosofiche ad essa estranee [5].

[1] Col vocabolo transfinito intendo così l'infinito come l'infinitesimo attuale.

[2] *S. Transfinite Zahlen, das Axiom des Archimedes und die projective Geometrie.* Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, 1897. — A. *Sul postulato della continuità,* fasc. 19 sett. 1897 di questi Rendiconti.

[3] *Sur les nombres transfinis de Mr. Veronese,* fasc. 19 dec. 1897.

[4] Padova, 1891. *Traduzione tedesca di A. Schepp.* Leipzig, 1894. Indicherò i *Fondamenti* nel corso di questa Nota con le lettere *F. G.*

[5] Fra i matematici che si occuparono di tale questione o espressero il loro avviso su di essa trovansi dei nomi illustri, come J. Bernoulli, Leibnitz, Gauss ecc. *F. G.*, pag. 619-625 — tr. t. pag. 697-707.

Essa invece va posta in modo analogo a quelle relative ai postulati delle parallele e delle dimensioni dello spazio; vale a dire dati tutti i postulati necessarî per costruire la figura corrispondente al campo della nostra osservazione esterna e considerati come possibili tutti quei postulati che non contraddicono ai precedenti e non si contraddicono fra loro (¹), il postulato d'Archimede è esso conseguenza degli altri? O in altre parole è egli possibile una geometria nella quale due segmenti A e B ($A < B$) non obbediscano in generale alla relazione $An > B$, essendo n un numero intero qualunque della serie 1, 2, 3....n..?

Se si dà il postulato della continuità nella forma proposta da Dedekind, o facendo corrispondere biunivocamente i punti della retta ai numeri reali *ordinarî*, allora detta relazione si può considerare come un'immediata conseguenza di esso (²). Ma io diedi alla proposizione della continuità un'altra forma che pur mantenendo i caratteri del continuo rettilineo non racchiude quella di Archimede. Anzi nella Nota sopra citata ho rilevato che mediante opportune definizioni si può dimostrare questa proposizione della continuità, cosicchè il postulato d'Archimede è un postulato di limitazione del campo della ricerca geometrica, come lo è quello delle tre dimensioni dello spazio.

Prima della pubblicazione dei miei *F. G.*, i sigg. G. Cantor e W. Killing avevano tentato di dimostrare il postulato d'Archimede. Essi non hanno però confutato le osservazioni da me fatte alle loro dimostrazioni (³), ma hanno invece criticata la parte degli infiniti e infinitesimi attuali svolta nella introduzione dei *F. G.*; il primo ritenendola impossibile, il secondo manifestando dei dubbî contro di essa. A queste critiche ho risposto punto per punto, tranne a qualche osservazione del sig. Killing, la quale non aveva un senso chiaro e determinato (⁴). Ma egli stesso poi chiarì meglio il suo concetto di *Zusammenhang* che credeva necessario alla costituzione del continuo rettilineo (⁵). Avrei risposto anche a questa obiezione, che pel sig. Killing era fondamentale, se il sig. Schoenflies stesso non me ne avesse in qualche modo dispensato, osservando che tale concetto non è geometricamente necessario (⁶). Ma a sua volta il sig. Schoenflies, che aveva già pubblicata una relazione cortese ed accurata dei *F. G.* (⁷), la quale dimostra il vivo interesse da lui preso pel mio libro, osservava poi nella sua prima Nota sopra citata:

(¹) *F. G.*, pref. pag. XI-XII, opp. *Osservazioni sui principî della geometria*, pag. 4. Atti della R. Acc. di Padova, giugno 1894, o ancora *Sul postulato della continuità*, pag. 162.

(²) *F. G.*, l. c.

(³) *F. G.*, pag. 132 e 165, tr. t. pag. 701 e 705.

(⁴) *Intorno ad alcune osservazioni contro i segmenti infiniti e infinitesimi attuali.* Math. Annalen, Bd. 47.

(⁵) Math. Annalen, Bd. 48, pag. 425 e seg.

(⁶) Transfinite Zahlen ecc.

(⁷) Göttinger Gelehrte Anzeigen, Nr. 12, 1895. In questa relazione, nella quale Schoenflies riferisce e interpreta generalmente con esattezza i concetti dei *F. G.* e particolarmente del continuo rettilineo, egli non si occupa della teoria degli infiniti e infinitesimi.

1° che non è sempre possibile la moltiplicazione coi miei numeri transfiniti;

2° che la moltiplicazione ha luogo invece con quelli studiati dal prof. Levi-Civita perchè, egli dice, mentre questi si estendono indefinitamente in generale da un lato soltanto, i miei si estendono indefinitamente da due lati;

3° che quindi non è possibile una geometria proiettiva nel campo dei numeri transfiniti.

Nella mia Nota *Sul postulato della continuità* ho invece affermato che i numeri da lui scelti non appartengono al mio sistema, che non sussiste la differenza notata fra i miei numeri e quelli del prof. Levi-Civita, e finalmente che è possibile una geometria proiettiva nel campo dei numeri transfiniti. Il sig. Schoenflies, come ho detto, torna nell' ultima sua Nota con maggiori particolari per dimostrare l' esattezza delle sue asserzioni. Egli dice dapprincipio:

« D' abord je pourrai citer Mr. Veronese contre lui même; dans une « note des *Fondamenti* on trouve les mots suivants » (¹): « I nostri numeri « infiniti e infinitesimi sono in fondo numeri complessi speciali con infinite « unità; tali però che il prodotto di due di esse non si esprime linearmente « mediante le altre, e per ciò per questi numeri vale il teorema che se il « prodotto di due di essi è nullo, deve esser tale anche uno dei fattori, come « vale pei numeri complessi ordinarî e pei quaternioni di Hamilton ».

E dopo aver riportato il simbolo dei numeri positivi interi (²) e del numero generale compreso fra 0 e 1, cioè:

$$Z = (AA_1)\Big[\Big(\frac{\alpha_1^{(0)}}{2} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(1)}}{2^n}\Big) \pm \frac{m_1}{\infty_1}\Big(\frac{\alpha_1^{(1)}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{2^{n_1}}\Big) + \cdots$$

$$\cdots \pm \frac{m_r}{\infty_1^r}\Big(\frac{\alpha_1^{(r)}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_r}^{(r)}}{2^{n_r}}\Big) \pm \cdots \pm \frac{m_{\infty_1 - r'}}{\infty_1^{\infty_1 - r'}}\Big(\frac{\alpha_1^{(\infty_1 - r')}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n\,\infty_1 - r'}^{(\infty_1 - r')}}{2^{n\,\infty_1 - r'}}\Big) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{m_\mu}{\infty^\mu}\Big(\frac{\alpha_1^{(\mu)}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_\mu}^{(\mu)}}{2^{n_\mu}}\Big)\Big]$$

(¹) Pref. pag. XXVI (tr. t. pag. XXV).

(²) Il simbolo di un numero intero positivo è:

$$Z = \infty_1^\mu n_1 \pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \pm \cdots \pm \infty_1^n n_{\mu-n+1} \pm \cdots \pm n_{\mu+1}$$

ove le n sono numeri finiti e interi ordinarî che possono esser tutte o in parte zero e sono in numero finito, come risulta dalla costruzione stessa dei segmenti da cui derivano, e come è detto espressamente a pag. 123 dei *F. G.* (tr. t. pag. 138). Il numero μ è uno dei numeri già ottenuti dal simbolo Z, ma in $n_{\mu+1}$ non indica che il numero dei coefficenti n sia infinito.

egli dà un esempio di due numeri coi quali non si può eseguire la moltiplicazione, cioè:

$$A = a_0\, \infty_1^{\infty_1} + \cdots + a_r\, \infty_1^{\infty_1 - r} + \cdots + a'_{r'}\, \infty_1^{r'} + \cdots + a'_0 + \frac{a''_1}{\infty_1} + \cdots + \frac{a''_r}{\infty_1^r} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{a'''_{r'}}{\infty_1^{\infty_1 - r'}} + \cdots + \frac{a'''_0}{\infty_1^{\infty_1}}$$

$$B = b_0\, \infty_1^{\infty_1} + \cdots + b_r^{\infty_1 - s} + \cdots + b'_{s'}\, \infty_1^{s'} + \cdots + b'_0 + \frac{b''_1}{\infty_1} + \cdots + \frac{b''_s}{\infty_1^s} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{b'''_{s'}}{\infty_1^{\infty_1 - s'}} + \cdots + \frac{b'''_0}{\infty_1^{\infty_1}}$$

Nella Nota pubblicata nell' *Jahesbricht der Deutschen Math. Vereinigung* il sig. Schoenflies aveva dato questi due numeri:

$$A' = \cdots a_n\, \infty^n + \cdots + a_1\, \infty + a_0 + \frac{a'}{\infty} + \cdots + \frac{a^{(\nu)}}{\infty^{(\nu)}} + \cdots$$
$$B' = \cdots b_n\, \infty^m + \cdots + b_1\, \infty + b_0 + \frac{b'}{\infty} + \cdots + \frac{b^{(\mu)}}{\infty^{(\mu)}} + \cdots \qquad [1]$$

Dicendo che i numeri A e B o A′ e B′ si estendono indefinitamente dai due lati, egli ritiene che in A e B possano crescere indefinitamente r e r', s e s'. In tal caso è chiaro che ad es. il coefficente c_0 del termine del prodotto A . B, che moltiplica l'unità fondamentale 1, è la somma di un numero infinito di prodotti della forma $a_i \cdot b_k$, potendo essere a_i e b_k numeri reali ordinarî positivi, e quindi i coefficenti di A . B non si possono ottenere colle regole ordinarie, le quali, come Schoenflies avverte, si possono applicare invece quando i numeri transfiniti contengono un numero finito di termini, oppure si estendono indefinitamente da un solo lato.

Questa è l'obiezione principale del sig. Schoenflies, della quale le altre sono conseguenze.

2. Da quanto ho affermato a tal proposito nella mia Nota *Sul postulato della continuità* risulta che i miei numeri non possono estendersi indefinitamente dai due lati ma da un lato solo. Prima però di provare questa mia affermazione debbo premettere una considerazione che sembra sfuggita al sig. Schoenflies e può sfuggire anche a chi nell'esame di questa parte dell'introduzione dei *F. G.* prenda di mira soltanto i numeri coi quali ho rappresentati i segmenti finiti, infiniti e infinitesimi attuali. Il sig. Schoenflies rileva che ho dato un *solo* esempio numerico, e che non sempre nel libro

[1] Veramente qui non va ∞ (che è evidentemente un errore di stampa) perchè ∞ è il simbolo anche da me usato per indicare l'infinito potenziale, ma va ∞_1 che indica un infinito attuale.

si trovano indicate le regole sufficienti per il calcolo. Io non ho alcuna difficoltà di ammettere ciò, anzi credo che questo sia un pregio del mio metodo. Nell' introduzione ho adottato, per la natura stessa delle cose trattate, il metodo basato sul puro ragionamento, ed ho stabilito così le proprietà della forma fondamentale che nella geometria corrisponde alla retta. Ho costruito i segmenti e li ho rappresentati per fissare le idee con dei simboli (numeri), ai quali ho esteso le proprietà dei segmenti e viceversa. Dalle mie costruzioni ho dedotto la esistenza del segmento rappresentante il prodotto e il quoziente di un segmento per un numero dato, e quindi anche di due numeri [1]. Da ciò deducesi che valgono per le operazioni fondamentali con questi numeri le leggi ordinarie. Considerando dunque i numeri come simboli scelti per indicare i nuovi segmenti che mano mano venivo costruendo, a me non interessava punto di dar sempre le regole algoritmiche che servono al calcolo coi miei numeri indipendentemente dalle considerazioni sintetiche. È però ovvio che dalle costruzioni eseguite sulla forma fondamentale per ottenere ad es. il prodotto o il quoziente di un segmento per un numero, si possono ricavare facilmente le regole della determinazione simbolica dei termini del prodotto e del quoziente di due numeri qualunque essi siano.

E a maggior ragione non mi sono occupato di trovare un algoritmo più semplice, dal punto di vista analitico, per rappresentare i miei numeri, perchè tale ricerca sarebbe stata estranea allo scopo dei *F. G.* Ma a tale proposito ho citato nelle mie precedenti Note la Memoria del prof. Levi-Civita sugli infiniti e infinitesimi attuali quali elementi analitici [2], nella quale egli costruisce con considerazioni puramente numeriche un sistema di numeri che corrispondono ai miei numeri finiti, infiniti e infinitesimi *d'ordine finito*. Questi si ottengono dai primi quando agli indici ν dei monosemi a_ν (dove a e ν sono numeri reali ordinarî) e che corrispondono ai miei numeri $a\,\infty_1^\nu$, si danno valori interi. Del resto le proprietà caratteristiche dei numeri rimangono le stesse anche dando a quegli indici dei valori non interi. Ed è facile vedere, anche seguendo le considerazioni puramente analitiche del prof. Levi-Civita, che i miei numeri finiti, infiniti e infinitesimi d'ordine finito formano un corpo, nel senso che si trasforma in se medesimo mediante le operazioni fondamentali dell'aritmetica regolate dalle leggi ordinarie [3].

Ora, la obiezione del sig. Schoenflies, sebbene egli non lo abbia detto, non si riferisce ai miei numeri finiti, infiniti e infinitesimi d'ordine finito, espressi colle unità $1,\ \infty_1,\ \infty_1^2 \ldots\ \infty_1^n \ldots,\ \frac{1}{\infty_1},\ \frac{1}{\infty_1^2} \cdots \frac{1}{\infty_1^n},$ ma bensì ai numeri infiniti e infinitesimi d'ordine infinito.

(1) *F. G.*, pag. 154-159, tr. t. pag. 170-176.

(2) Atti del R. Istituto veneto, 1894.

(3) *F. G.*, pag. 124 e 201 tr. t. pag. 139 e 217.

Nella parte geometrica dei *F. G.* ho dichiarato che mi limito soltanto al campo dei segmenti transfiniti di ordine finito [1]; la questione dunque di una geometria nella quale due segmenti rettilinei A e B ($A < B$) non obbediscono in generale al postulato d'Archimede, ma bensì alla relazione $A\,\eta > B$ dove η è un numero transfinito, non è intaccata menomemente dalle obiezioni del sig. Schoenflies [2].

3. Ma almeno le obiezioni del sig. Schoenflies rispetto ai miei numeri transfiniti d'ordine infinito sono esse esatte? Per quanto tale questione, dopo ciò che ho detto, diventi secondaria per la geometria, *debbo rispondere negativamente.*

Intanto dalla nota della prefazione dei *F. G.* da lui citata e sopra riportata, non risulta che io sia in contraddizione con me stesso, non risulta cioè che la moltiplicazione dei miei numeri non possa aver luogo. Anche i numeri studiati dal sig. Levi-Civita, e pei quali il sig. Schoenflies riconosce possibile la moltiplicazione, sono numeri complessi a infinite unità 1_ν (dove ν è un numero reale qualunque ordinario) pei quali vale appunto l'osservazione contenuta nella nota anzidetta. Quella mia osservazione non autorizza dunque a trarre la conclusione che il numero $C = A . B$ non è confrontabile cogli altri numeri del sistema, come egli asserisce alla fine della sua ultima Nota, perchè tale asserzione si basa sulla obiezione relativa alla moltiplicazione. Ora, questa obiezione deriva da un malinteso, vale a dire il sig. Schoenflies ritiene erroneamente che i miei numeri si possano estendere indefinitamente dai due lati anzichè da uno solo, nel senso ad es. che r' nel numero A possa crescere indefinitamente, come può crescere indefinitamente r. Per persuadersene basta osservare che i miei segmenti, e quindi anche i numeri che li rappresentano, sono ottenuti o come somme di un numero finito di segmenti finiti, o coll'applicazione ad un segmento dato di un numero finito di volte del principio dell' ip. IV e dell' ip. V, o mediante la somma di un numero finito di segmenti così ottenuti, coll'applicazione dell' ip. VII e finalmente come somma di un numero finito di segmenti limiti di serie di segmenti indefinitamente decrescenti sia in senso relativo che in senso assoluto. La serie ad es.:

$$(1) \qquad a_0\,\infty_1 + a_1\,\infty_1^2 + \cdots + a_n\,\infty_1^n + \cdots \quad \text{per } n = \infty$$

non rappresenta un segmento (AB), ma un campo illimitato di segmenti, e quindi neppure uno dei miei numeri. Il numero A deve sempre cominciare da un primo numero di unità data, ad es. ∞_1^n, mentre il simbolo A′ del sig. Schoenflies lascia credere che n possa crescere indefinitamente. Così il numero A non può contenere la serie:

$$\frac{a}{{\infty_1}^{\infty_1 - r'}} + \frac{a'}{{\infty_1}^{\infty_1 - (r'-1)}} + \cdots$$

(1) *F. G.*, pag. 245, tr. t. pag. 266.

(2) Osservo a questo proposito che per la intelligenza della sola parte geometrica dei *F. G.* il lettore può limitarsi facilmente ai transfiniti d'ordine finito.

dove r' cresce indefinitamente, perchè tale serie è analoga alla (1), essendo ciascun termine infinito rispetto al seguente.

Può invece contenere una serie sempre crescente di questo tipo:

$$(2) \qquad \frac{a_1}{\infty_1} + \frac{a_2}{\infty_1^2} + \cdots + \frac{a_n}{\infty_1^n} + \cdots \quad \text{per } n = \infty$$

perchè essa ha un segmento limite nel campo dei numeri infiniti d'ordine finito, e quindi rappresenta uno dei miei numeri. Tali considerazioni sono ovvie quando si pensi alla costruzione dei segmenti e del simbolo Z del numero generale compreso fra 0 e 1, imperocchè ottenuto un segmento AB, (rappresentato ad es. da un numero razionale o irrazionale ordinario) ad esso, a cominciare da B aggiungiamo (in senso algebrico) un certo segmento infinitesimo di 1° ordine, o un segmento ottenuto mediante una serie della forma (2), ed otteniamo così un segmento (AB'). Poi aggiungiamo un segmento $\frac{a}{\infty_1{}^{\infty_1 - r'}}$, dove naturalmente r' è quanto grande si vuole, ma dato, e si potrà poi aggiungere un segmento rappresentato da una serie ad es. della forma

$$\frac{a'}{\infty_1{}^{\infty_1 - r'}} + \cdots + \frac{a'_n}{\infty_1{}^{\infty_1 - r' + n}} + \cdots \; (n = \infty)$$

Ed infatti ho detto espressamente nei *F. G.* « che l'infinitesimo di ordine $\infty_1 - r'$ si riferisce all'elemento (cioè B') determinato dalle parentesi precedenti ».

Non nego però che dal solo simbolo Z e dalla definizione data poi si possa credere anche che r' cresca indefinitamente; ma ciò è escluso dalla costruzione medesima di cui quel simbolo e quella definizione fanno parte.

Se il simbolo Z si scrive così

$$Z = (A\,A_1)\left[m \pm \frac{m_1}{\infty_1} \pm \cdots \pm \frac{m_r}{\infty_1^r} + \cdots + \frac{m_{\infty_1 - r'}}{\infty_1{}^{\infty_1 - r'}} + \cdots + \frac{m_{\infty_1 - r' + r_1}}{\infty_1{}^{\infty_1 - r' + r_1}} + \cdots + \right]$$

r e r_1 possono crescere indefinitamente, r' no. Non nego anche che il simbolo poteva essere scritto meglio ponendo invece di r' un'altra lettera, ad es. s'. È in ogni modo chiaro per la costruzione dei segmenti e quindi dei numeri che essi si estendono indefinitamente da un solo lato. Se si prendono due dei miei numeri nella forma analoghi a quelli del sig Schoenflies, cioè:

$$A = a_0\,\infty_1^{\infty_1} + a_1\,\infty_1^{\infty_1 - 1} + \cdots + a_r^{\infty_1 - r} + \text{ecc.} + a'_m\,\infty_1^m + \cdots + a'_0 + \frac{a''_1}{\infty_1} +$$

$$+ \cdots + \frac{a''_{r_1}}{\infty_1{}^{r_1}} + \text{ecc.} + \frac{a'''_{r'}}{\infty_1^{\infty_1 - r'}} + \cdots + \frac{a'''_0}{\infty_1^{\infty_1}}$$

$$B = b_0\,\infty_1^{\infty_1} + \cdots + b_s\,\infty_1^{\infty_1 - s} + \text{ecc.} + b'_n\,\infty_1^n + \cdots + b'_0 + \frac{b''_1}{\infty_1} + \cdots + \frac{b''_{s_1}}{\infty_1^{s_1}} +$$

$$+ \text{ecc.} + \frac{b'''_{s'}}{\infty_1{}^{\infty_1 - s'}} + \cdots + \frac{b'''_0}{\infty_1^{\infty_1}}$$

dove *ecc.* significa che vi è una serie indefinita di termini, la moltiplicazione è possibile, nel senso che A . B è un numero del sistema confrontabile cogli altri. Ad es. essendo $n \geqq r_1$, $m \geqq s_1$, il coefficente c_0 dell'unità 1 è

$$c_0 = \sum_0^{r'} b_i \, a_i''' + \sum_0^{r_1} b_i' \, a_i'' + \sum_0^{s_1} b_i'' \, a_i' + \sum_0^{s'} b_i''' \, a_i \, .$$

Da ultimo osservo che l'esempio numerico dei *F. G.* riportato dal sig. Schoenflies, nel quale esprimo il numero $\frac{1}{\infty_1 - m}$ mediante le unità $\frac{1}{\infty_1}$, $\frac{1}{\infty_1^2} \cdots \frac{1}{\infty_1^\mu}$ è esatto limitandosi alle unità $\frac{1}{\infty_1} \, \frac{1}{\infty_1^2} \cdots \frac{1}{\infty_1^n} \cdots$ cioè al campo dei numeri infinitesimi di ordine finito. La prima parentesi basta a determinare il numero stesso anche considerando le unità infinite d'ordine infinito ([1]).

4. Il Klein nella sua recente relazione sul terzo volume della teoria dei gruppi di trasformazioni di Lie, accennando ai miei numeri transfiniti, e quindi al nuovo continuo rettilineo, dichiara di astenersi dal pronunciarsi sulle obiezioni mosse contro tali concetti, ma che però da essi non si sono ottenuti finora « greifbare geometrische Resultate ». Non discuto gli apprezzamenti personali sul valore delle cose mie, tanto più di un matematico il cui nome mi risveglia care memorie; credo però che quando non si avrà più alcun dubbio sulla soluzione da me data alla questione dell'assioma d'Archimede si troveranno anche nella parte geometrica dei *F. G.* dei risultati chiari e determinati ([2]); e in ogni caso si vedrà che la soluzione della questione che mi sono proposta è già per se stessa un risultato matematico determinato.

A proposito dell'indirizzo del mio libro, Klein aggiunge che egli trova « aeusserst schwer » di seguire il mio « Gedankengang » anche in una sola parte. Non nego che difficoltà vi siano, ma esse dipendono anche dalla natura del problema trattato. Più si discende e più difficili sono le questioni intorno ai fondamenti della scienza, di guisa che le maggiori difficoltà s'incontrano dapprincipio. E nel mio libro sono forse più gravi che in altri, perchè non ho supposto nulla di noto per trattare il problema in tutta la sua generalità. Se io avessi avuto di mira un solo postulato, ad es. quello di Archimede, o se io avessi fatto uso fin dal principio dell'istrumento analitico

([1]) *F. G.* pag. 155 e seg. tr. t. 172.

([2]) Ad es. il sistema geometrico del quale fanno parte il sistema Riemanniano (sferico o elittico) e il sistema Euclideo, ove si passa dall'uno all'altro coi concetti d'infinito e di infinitesimo attuale; e il risultato che in ogni campo infinitesimo attuale intorno ad un punto del sistema Riemanniano del sistema Euclideo e di quello di Lobatschewsky vale il sistema Euclideo. Queste proposizioni furono dimostrate anche analiticamente dal prof. Levi-Civita (l. c.).

con tutte le sue risorse, le mie ricerche sarebbero state più facilmente comprese; ma avrei trattata la questione dei principî della matematica e in particolare della geometria da un punto di vista più ristretto. Pur riconoscendo l'importanza di tali indirizzi e dei risultati con essi ottenuti, quanti postulati ad es. non si ammettono coll'applicare direttamente l'analisi ai primi elementi della geometria? E questi postulati sono essi i più proprî alla natura del problema? Analisti insigni, compreso Klein, insegnano che deve preferirsi per la trattazione dei principî della geometria il metodo sintetico, ma questo metodo per sè e ancora più colle nuove forme assunte dall'intuizione geometrica che urtano vecchie abitudini e radicate convinzioni, è oggidì meno seguito e riesce a molti più difficile del metodo analitico.

Un'altra difficoltà sta nella scomposizione dei postulati nelle loro parti semplici, essendo preferibile, come dice il Klein stesso, un sistema di postulati più semplice di un altro più complicato. Ma tale metodo, quando sia applicato il più possibile ad ogni postulato, ha lo svantaggio di far perdere di vista facilmente i concetti generali che presentano qualche novità. Tuttavia mi lusingo che quando la teoria dei segmenti infiniti e infinitesimi attuali sarà riconosciuta esatta, si riconoscerà pure che essa è svolta nei miei *F. G.* sufficientemente e nel modo che meglio corrisponde alla sua natura geometrica.

Fisica. — *La criptoluminescenza dei metalli.* Nota del Corrispondente A. Ròiti.

§ 1. — Nella mia Nota [1] presentata all'Accademia in agosto 1897, ho riferito delle esperienze che stabiliscono come il potere emissivo dei metalli pei raggi X vada di pari passo col peso atomico. In quelle esperienze un piattello d'alluminio chiudeva il tubo davanti al catodo leggermente convesso, ed era coperto all'interno per metà con un metallo A e per l'altra metà con un metallo B, ed all'esterno era coperto in corrispondenza di B con A ed in corrispondenza di A con B, in maniera che le grossezze dei varî strati da attraversare fossero per tutto uguali. E pure lo schermo criptoscopico, applicato contro tale sistema, s'illuminava di più su quella metà che toccava il metallo di minor peso atomico, e così il metallo di peso atomico maggiore mostrava maggior potere emissivo pei raggi X.

In queste osservazioni la difficoltà maggiore è di distribuire uniformemente i raggi catodici sul piatto anticatodico: ed ho trovato qualche vantaggio sostituendo al tubo allora usato, il palloncino qui rappresentato nella

[1] *Se i raggi X esistano già nel fascio catodico che li produce.* Rendiconti, Vol. VI, pag. 129.

fig. 1, ed applicando entrambi i metalli da cimentare sulla faccia interna del piatto che è grosso 1 mm. circa. Il fondo del criptoscopio C è una sottilissima lamina pure di alluminio, coperta col platinocianuro di bario e protetta da un diaframma di piombo PP′ forato nel mezzo. La coppia metallica indicata in AB, vien posta per queste esperienze, come ho detto, nell' interno del palloncino e non all'esterno com'è segnato nella fig. 1. È costituita da due dischi (fig. 2) tagliati lungo un raggio ed abbracciantisi in maniera che il semicerchio A copra B′, ed il semicerchio A′ sia coperto da B. Le due lamine sono premute l' una contro l' altra, e non tenute discoste come fu segnato nello schema della fig. 1.

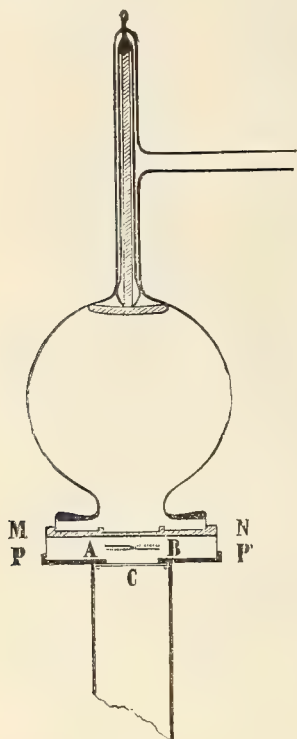



Fig. 1.

Con siffatta disposizione mi sono accertato che l'argento fine ha maggior potere emissivo dell' argento a $^{800}/_{1000}$. Di più ho potuto mettere in evidenza che il platino ha un potere emissivo compreso fra quello di due leghe contenenti l'una 8 e l'altra 27 grammi di stagno per 100 grammi di piombo, e quindi aventi i loro pesi atomici medî uno maggiore e l' altro minore di quello del platino. Le leghe furono composte dal dott. G. Ercolini fondendo insieme nel vuoto di una tromba di Geissler quantità pesate dei due metalli dati per puri dalla Casa Merck di Darmstadt.

Fig. 2.

§ 2. — Provai a collocare la coppia metallica AB esternamente al palloncino, in contatto col piatto d'alluminio e collo schermo criptoscopico: e feci questa prova quantunque (1) nell'agosto 1896 non fossi riuscito, servendomi del mio attinometro (2), a riscontrare che l'opacità di un sistema di due lamine aventi criptocrosi diversa mutasse al mutare dell'ordine col quale erano sovrapposte e però attraversate successivamente dai raggi X; perchè tale insuccesso mi aveva lasciato pur sempre il dubbio che i raggi X, penetrando nei varî corpi, vi eccitassero dei nuovi raggi diversi, presentassero cioè un fenomeno che si può chiamare *criptoluminescenza.* Il dubbio, oltre che dalla insufficiente sensibilità del metodo allora usato, era avvalorato dalla circostanza che fra la superficie d' emissione ed il sistema delle due lamine, e fra queste e l' attinometro col platinocianuro di bario, erano di necessità interposti parecchi centimetri d'aria la quale poteva esercitare un assorbimento elettivo.

Mi riuscì di accertare la criptoluminiscenza fin dai primi d'ottobre 1897, e ne feci poi l' oggetto di una lunga serie d' osservazioni che credo non sia

(1) *Un' altra esperienza di criptocrosi.* Rendiconti, vol. V, pag. 155.
(2) *Un altinometro pei raggi X.* L'Elettricista, anno V, n. 9.

superfluo di far conoscere, malgrado le belle esperienze che nel frattempo G. Sagnac ha riferite all'Accademia di Francia.

Lo schermo criptoscopico, toccando la coppia metallica AB è in generale un poco più luminoso per una metà, poniamo per quella che tocca B: e mi assicuro che la differenza non deriva da cause fortuite se essa persiste nel medesimo senso capovolgendo la coppia, facendola rotare nel proprio piano rispetto al palloncino, o facendo rotare rispetto ad essa lo schermo criptoscopico. Dico in tal caso che il metallo A è più efficace se primo riceve i raggi X, e scrivo:

$$A > B;$$

Se la differenza è piccolissima scrivo:

$$A \geq B;$$

Se è incerta:

$$A = B.$$

Registro qui sotto i risultati ottenuti coll'assistenza del dott. F. Chiavassa, ordinando i vari metalli per peso atomico decrescente, e notando davanti ai loro simboli la grossezza in centesimi di millimetro delle lamine cimentate:

4 Pb > 4 Au			
13 Pb > 1,2 Pt	8 Pb > 1,2 Pt	4 Pb > 1,2 Pt	5 Pb > 5 Pt
8 Pb > 12 Sn			
10 Pb > 10 Ag	10 Pb ≥ 4 Ag	7 Pb > 10 Ag	7 Pb > 4 Ag
		4 Pb > 10 Ag	4 Pb = 4 Ag
7 Pb > 5 Pd		4 Pb > 5 Pd	
8 Pb > 10 Cu			
13 Pb > 17 Fe			
13 Pb > 10 Al			
13 Pb > 24 Mg			
4 Au = 5 Pt	4 Au = 3 Pt	4 Au > 1,2 Pt	
4 Au > 5 Pd			
4 Au ≥ 10 Cu	4 Au ≥ 7 Cu	4 Au > 5 Cu	
4 Au > 10 Co			
4 Au > 8 Ni			
1,2 Pt = 12 Sn			
5 Pt > 10 Ag	5 Pt > 4 Ag	1,2 Pt = 10 Ag	1,2 Pt ≥ 4 Ag
5 Pt > 5 Pd	3 Pt > 5 Pd	1,2 Pt > 5 Pd	
5 Pt = 10 Cu	5 Pt = 3 Cu	3 Pt = 10 Cu	3 Pt = 3 Cu
		1,2 Pt = 3 Cu	1,2 Pt ≤ 10 Cu
3 Pt > 8 Ni	1,2 Pt ≥ 8 Ni		
12 Sn > 10 Ag	12 Sn > 10 Ag	12 Sn > 4 Ag	5 Sn ≥ 10 Ag

12 Sn < 10 Cu	12 Sn = 3 Cu	5 Sn = 10 Cu	5 Sn = 3 Cu
12 Sn = 17 Fe			
8 Cd = 10 Ag	8 Cd ≥ 4 Ag		
8 Cd ≥ 5 Pd			
8 Cd ≤ 7 Cu			
10 Ag ≥ 5 Pd	4 Ag = 5 Pd		
10 Ag < 10 Cu	10 Ag = 3 Cu	4 Ag < 10 Cu	4 Ag = 3 Cu
10 Ag < 8 Ni	4 Ag < 8 Ni		
10 Ag = 8 Al	4 Ag = 8 Al		
10 Ag > 10 Mg	4 Ag > 10 Mg		
10 Zn > 6 Al			
5 Pd < 10 Cu	5 Pd = 3 Cu		
10 Cu = 10 Co	7 Cu = 10 Co	5 Cu ≤ 10 Co	
10 Cu = 8 Ni	5 Cu ≥ 8 Ni		
10 Co ≥ 8 Ni			
10 Co > 12 Fe			
8 Ni = 12 Fe			
12 Fe = 10 Al	10 Fe ≥ 6 Al		

Il piombo mi fu favorito dal prof. Giacomelli che l'ha preparato da sè; l'oro e l'argento fini ed il rame elettrolitico mi sono stati forniti dalla Casa Caplain Saint André et Rondeleux di Parigi, gentilmente indicatami dal prof. Cornu; il platino fu dato come chimicamente puro da H. Deibel di Hanau; lo stagno fu dato come puro dalla Casa Merck di Darmstadt; il cadmio, lo zinco, il palladio, il cobalto ed il nichel dati per purissimi dalla Casa Schuchardt di Goerlitz; gli altri metalli sono d'ignota provenienza.

La prima curiosità che si prova davanti a questo prospetto è di vedere se, trovandosi la coppia metallica esterna al palloncino, vale ancora la regola stabilita quand'era interna, che cioè lo schermo s'illumini più dove riceve i raggi che hanno attraversato primo il metallo di maggior peso atomico. E ciò si verifica nel maggior numero dei casi. Tolti quelli nei quali non mi fu possibile accertare una differenza in senso costante, tutti gli altri che fanno eccezione si dividono in due gruppi: nel primo entra costantemente il rame, e nel secondo l'argento ed il nichelio.

Non saprei se imputare l'anomalia ad impurità dei metalli: il rame è elettrolitico e l'argento è fine, ma ciò non esclude che possano contenere traccie di altri metalli.

Ad ogni modo il contegno dei metalli è profondamente diverso secondo che sono colpiti dai raggi catodici o dai raggi X: quando sono colpiti dai raggi catodici, e si può parlare del loro potere emissivo, le differenze di splendore sono molto più accentuate, ed anche il rame e l'argento, tali e quali sono a mia disposizione, rientrano decisamente nella regola suddetta; allorchè

invece sono colpiti dai raggi X, ed il fenomeno ha più stretta analogia colla luminiscenza, s'incontrano numerosi casi nei quali non è dato accertare differenza di splendore, e poi si presentano i casi eccezionali testè segnalati. Ma v'ha di più: la diversa emissione dei raggi X si osserva ancora attraverso al piatto d'alluminio ed a parecchi centimetri d'aria, mentre non mi fu possibile riscontrare attraverso ad uno strato d'aria di 5 cm. una differenza di splendore assegnabile a criptoluminescenza.

In questa prova mi sono servito d'una coppia piombo-alluminio, e fra lo schermo criptoscopico e la coppia ho disposto un tubo d'ottone di 5 cm. con grosso setto longitudinale (fig. 3).

Messa poi da parte la coppia metallica e chiuso il tubo d'ottone, come indica la fig. 3, con una lamina per metà ad un capo e per l'altra metà al capo opposto, lo ho collocato fra il piatto del palloncino e lo schermo del criptoscopico, ed ho riconosciuto con certezza che questo è più luminoso dove tocca la lamina. Ciò porta a ritenere che i raggi di criptoluminescenza sieno assorbiti dall'aria più dei raggi X che li eccitano.

Fig. 3.

E si noti che i mezzi attraversati dall'interno del palloncino sino al criptoscopio, sono solamente l'aria e l'alluminio, e che nelle ultime osservazioni il platinocianuro di bario era depositato sopra una lastra di vetro ed era rivolto all'anticatodo.

Questo fatto, lo incontrai già fino dalle primissime esperienze relative ai raggi di Röntgen, e mi parve così strano da enunciarlo con tutte le riserve nei seguenti termini (1):

« Da alcune osservazioni fatte colla fotografia, mi è parso di rilevare « che il grado di trasparenza di certe lamine variasse al variare della loro « distanza dalla superficie d'emissione dei raggi X. Ma ripeto che di questo « fatto non ho ancora prove sufficienti per escludere che non si sia insinuata « nell'osservazione qualche circostanza perturbatrice ».

Ora il fatto che la trasparenza apparente dipenda dalla distanza dallo schermo esploratore, è accertato; e trova un'interpretazione semplicissima.

Matematica. — *Sui numeri transfiniti.* Nota di Tullio Levi-Civita, presentata dal Corrispondente Veronese.

In un lavoro, pubblicato alcuni anni or sono (2), mostrai come, con opportune convenzioni, si riesca a costruire un sistema di numeri finiti, infiniti ed infinitesimi, per cui valgono tutte le ordinarie regole di calcolo. Fui condotto a tale sistema, cercando di svolgere con indirizzo puramente

(1) *Alcune esperienze coi tubi di Hittorff e coi raggi di Roentgen.* Seduta del 1° marzo 1896. Rendiconti, Vol. V, pag. 162.

(2) *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici.* Atti dell'Istituto Veneto, 1893.

aritmetico un' idea fondamentale del prof. Veronese. I miei numeri tuttavia non sono atti a rappresentare l' intero edificio di Veronese, ma ne comprendono (essendo per qualche rispetto più generali) solo una parte. Completo ora la mia ricerca, mostrando in qual modo si possa generare, per via di simboli, un sistema, nel cui tipo può farsi rientrare quello di Veronese, e per cui conservano la loro validità tutte le ordinarie leggi dell' aritmetica.

Contro i procedimenti del prof. Veronese sono state sollevate talune obbiezioni da critici eminenti. Se mi si concede di esprimere il mio modesto avviso, direi:

Le obbiezioni, prese in sè, sono generalmente giuste, ma non si possono applicare al sistema di Veronese, che è definito (specie per quanto si riferisce agli elementi infiniti d' ordine infinito) in modo alcun poco diverso da quello inteso dai critici, e sfugge così ai loro appunti.

Fu per certo il carattere eminentemente astratto dei concetti di Veronese e la insolita forma di intuizione geometrica, di che egli seppe rivestirli, origine e alimento alle divergenze. Io mi lusingo che le mie osservazioni di carattere esclusivamente aritmetico parranno esenti da ogni difficoltà e contribuiranno a far cessare il malinteso, col mettere in luce per altra via il senso preciso delle ipotesi geometriche del prof. Veronese.

Chieggo venia al lettore se l' indole delicata della questione mi obbligherà ad essere alquanto prolisso, sì da dedicare questa prima comunicazione ai preliminari, richiamando cose, dette già altrove, in modo non molto diverso. Seguirà in una Nota prossima la parte sostanziale della generalizzazione annunciata.

1. Sia un insieme ordinato di elementi (numeri nel significato più generale della parola) e si intendano adottati i segni $>$ e $<$, per esprimere l' ordine degli elementi; si scriva cioè $b > a$, se, nell' insieme ordinato, a precede b, ecc. Si supponga di poter definire, per gli elementi dell' insieme, certe quattro operazioni, che si comportino come le fondamentali dell' aritmetica, per modo:

che gli elementi dell' insieme costituiscano un corpo rispetto alle operazioni stesse;

che valgano tutte le ordinarie regole di calcolo (incluse quelle delle disuguaglianze algebriche) [1].

Chiameremo *sistema* A (ovvero A′, A″, ecc.) un insieme siffatto.

Costituisce per es. un sistema A l' insieme di tutti i numeri reali positivi e negativi, quando come criterio ordinativo si assuma quello della grandezza algebrica. Colla medesima convenzione si possono risguardare come sistemi A: l' insieme di tutti i numeri razionali, o più generalmente un qualsiasi corpo di numeri algebrici reali; infine l' insieme di elementi finiti, infiniti ed infinitesimi, che studiai nel citato mio scritto.

[1] Cioè per es., da $a > b$, $c > d$, segua $a + c > b + d$ e via dicendo.

Non possiede invece tutti i requisiti di un sistema A l'insieme degli ordinarî numeri reali e complessi (qualora si abbia riguardo soltanto alla grandezza dei rispettivi moduli); bisognerebbe aggiungere una qualche convenzinne, atta a farli divenire un insieme ordinato.

Ci gioverà ancora di contraddistinguere con una denominazione speciale, *sistema* N (ovvero N', N'', ecc.) un insieme ordinato, il quale da un lato soddisfaccia a ipotesi meno restrittive di A, in quanto si esiga solamente che gli elementi dell'insieme costituiscano un corpo rispetto alla somma e alla sottrazione (valendo sempre, si intende, le ordinarie regole di calcolo); ma dall'altro verifichi una condizione di più. Si ammetta cioè sotto la forma seguente il così detto *assioma di Archimede*: Se ω, ω' ed $\omega'' > \omega'$ sono tre elementi dell'insieme, esiste sempre un numero intero positivo k, tale che:

$$\omega < k(\omega'' - \omega').$$

Si intende che il simbolo $k(\omega'' - \omega')$ è soltanto un'abbreviatura della somma:

$$\overbrace{(\omega'' - \omega') + (\omega'' - \omega') + \cdots + (\omega'' - \omega')}^{k \text{ volte}},$$

cui, per le convenzioni poste, corrisponde effettivamente un elemento di N. A questo proposito si può osservare che tanto i sistemi A, quanto i sistemi N constano di un numero infinito di elementi e comprendono necessariamente lo zero. Infatti, se ω è un elemento di uno di questi sistemi, anche ω, 2ω, 3ω,..., *ad infinitum* debbono appartenere all'insieme; del pari $\omega - \omega$, che è poi lo zero, per essersi ammessa la conservazione delle leggi formali.

Sono sistemi N tutti gli A, citati poc'anzi, ad eccezione dell'ultimo; si ha invece un esempio di sistema N (ma non A) nell'insieme di tutti i numeri interi positivi e negativi, col solito criterio ordinativo della grandezza algebrica; così i multipli di un qualsiasi numero reale, ecc.

2. Dico che, assunti ad arbitrio un sistema A ed un sistema N, è possibile, con opportune convenzioni, costruire un nuovo sistema A' il quale:

1°) comprende tra i suoi elementi tutti quelli di A;

2°) ne comprende altri, che hanno, rispetto ai primi, carattere di infiniti e di infinitesimi.

Per questa costruzione, basta seguire l'identico metodo, che vale, quando A e N rappresentano l'insieme dei numeri reali [1].

Siano a, b, c, ecc. elementi di A; ν, μ, ϱ, ecc. elementi di N; un generico elemento si dirà, come di solito, positivo o negativo, secondochè esso sia $>$ o $<$ di zero.

[1] Loc. cit., passim; ivi ho anche accennato (pag. 45) ad una estensione del procedimento al caso che A sia lo stesso sistema, da me costruito. Qui non faccio altro che applicare gli stessi principî, senza specializzare la natura del sistema.

Ciò posto, ad ogni coppia a_ν faccio corrispondere un nuovo elemento, che dico *monosemio*. Chiamo a la caratteristica, ν l'indice del monosemio. Risguardo il monosemio a_0 identico al primitivo elemento a di A; pongo di più $0_\nu = 0$, qualunque sia l'indice ν: in ogni altro caso, attribuisco alla eguaglianza di due monosemii il senso della identità.

Per ordinare l'insieme dei monosemii, procedo nel modo seguente.

Considero dapprima due monosemii a_ν e b_μ, le cui caratteristiche sieno entrambe positive o entrambe negative. Se $\nu = \mu$, pongo $a_\nu \gtreqless b_\mu$, secondochè $a \gtreqless b$; se invece ν è diverso da μ, pongo $a_\nu \gtrless b_\mu$, secondochè $\nu \gtrless \mu$.

Venendo al caso, in cui le caratteristiche a e b sono l'una, poniamo a, positiva o nulla, e l'altra b negativa o nulla, stabilisco sia $a_\nu > b_\mu$; va però esclusa l'ipotesi $a = b = 0$, per cui s'è posto $0_\mu = 0_\nu = 0$.

Si verifica senza difficoltà che queste definizioni permettono effettivamente di ordinare l'insieme dei monosemii; sono cioè soddisfatte le leggi caratteristiche dei segni $=$, $>$ e $<$. Per es., da $a_\nu > b_\mu$, $b_\mu > c_\rho$, segue $a_\nu > c_\rho$, e così via.

Consideriamo ora un insieme (finito o infinito) di elementi N, tale però che sia in ogni caso *finito* il numero di quelli tra essi, che superano un elemento ω dello stesso N, comunque si scelga ω. Chiameremo per brevità *ellittico* un insieme di tal natura; esso è necessariamente numerabile, o, in particolare, finito; anzi è manifesto che, facendo decrescere ω in N, se ne possono ordinare gli elementi (tra loro distinti) in una successione decrescente finita:

$$\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(n)},$$

o decrescente indefinitamente

$$\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(n)}, \ldots$$

Si dimostra per questi insiemi ellittici:

Lemma I. Se $\nu^{(r)}$, $\mu^{(s)}$ $(r, s = 0, 1, \ldots, n, \ldots)$ costituiscono due insiemi ellittici, anche l'insieme di elemento generale $\nu^{(r)} + \mu^{(s)}$ è ellittico.

Lemma II. Nelle stesse condizioni è ellittico l'insieme di elemento generale:

$$(\nu^{(\tau)} - \mu^{(0)}) + (\mu^{(p_1)} - \mu^{(0)}) + (\mu^{(p_2)} - \mu^{(0)}) + \cdots + (\mu^{(p_k)} - \mu^{(0)}),$$
$$(\tau, k, p_1, p_2, \ldots, p_k = 0, 1, \ldots, n, \ldots).$$

La dimostrazione di questi due lemmi si fa come nella citata mia Nota. Ivi ho supposto che l'insieme N sia costituito da tutti i numeri reali, ma si constata immediatamente che intervengono nella dimostrazione soltanto proprietà, spettanti ad ogni N.

Risguarderò come nuovo ente (numero) un complesso di monosemii, *i cui indici siano distinti* e costituiscano un insieme ellittico. Come caso

particolare rientrano in questa definizione i monosemii, i quali comprendono a lor volta gli elementi del sistema primitivo A (monosemii di indice zero). Designeremo con a', b', c', ecc. tali nuovi enti. *Essi costituiscono complessivamente un sistema* A'.

Le convenzioni, atte a ordinare il sistema e a definirne le operazioni fondamentali, la attendibilità di queste convenzioni e le loro principali conseguenze sono state discusse con dettaglio, nel predetto mio lavoro, per il caso che A e N constino di tutti i numeri reali; ognuno riconoscerà agevolmente che le ipotesi qui ammesse sui due sistemi bastano per il rigore del procedimento. Posso dunque limitarmi a ricordare le convenzioni.

Un numero a' sarà a ritenersi eguale a zero, se tutti i monosemii, che lo costituiscono, hanno caratteristica nulla.

Dati due numeri a' e b', si considerino i monosemii, che li costituiscono. nell'ordine decrescente degli indici; o le due successioni sono identiche, e allora porremo $a' = b'$; oppure si incontra in una di esse, poniamo in a', un primo monosemio a_ν, che non coincide col corrispondente b_μ (se quest'ultimo manca, il che può accadere, quando b' consta di un numero finito di elementi, lo si intenderà sostituito collo zero); risguarderemo $a' \gtrless b'$, secondochè $a_\nu \gtrless b_\mu$.

Per *somma algebrica* $a_\nu \pm b_\nu \pm c_\nu \pm \cdots$ *di un numero finito di monosemii, aventi il medesimo indice*, intendo il monosemio $(a \pm b \pm c \pm \cdots)_\nu$; *per somma algebrica di un numero finito di addendi* $a' \pm b' \pm c' \pm \cdots$ intendo il numero, che corrisponde all'insieme dei monosemii di tutti gli addendi. Siccome però, nella definizione di numero, ho supposto distinti gli indici dei monosemii, che lo costituiscono, così soddisferò a questa condizione, stabilendo di sostituire i monosemii, dotati di indice eguale, con la loro somma.

Chiamo *prodotto di due monosemii qualisivogliono* a_ν, b_μ il monosemio $(ab)_{\nu+\mu}$.

Siano rispettivamente $a^{(r)}_{\mu(s)}$, $b^{(s)}_{\mu(s)}$ $(r, s = 0, 1, \ldots, n, \ldots)$ i monosemii di due numeri a' e b'; chiamo *prodotto di* a' *per* b' quel numero c', i cui monosemii si ottengono, moltiplicando in tutti i modi possibili un monosemio di a' per uno di b', e avendo poi cura di sommare tra loro tutti i monosemii di indice eguale.

Il lemma I. giustifica questa definizione.

La *divisione* si definisce come la operazione inversa della moltiplicazione. Il quoziente di due monosemii a_ν, b_μ è dunque $\left(\frac{a}{b}\right)_{\nu-\mu}$ (il divisore, e quindi b, si intende diverso da zero); per due numeri generali a' e b', se ne ordinano i monosemii, secondo la grandezza decrescente degli indici e si applica il solito algoritmo, che serve a trovare il quoziente di due polinomii.

Per il lemma II., i monosemii, che risultano in tal guisa, definiscono effettivamente un numero, il quale, moltiplicato per b', riproduce a'.

3. Prendendo come sistema A l'insieme di tutti i numeri reali, come sistema N quello di tutti i numeri interi, si ha un A' sostanzialmente identico ai numeri di Veronese finiti, infiniti e infinitesimi d'ordine finito (1). Per questi dunque (nè in ciò vi è controversia), valgono tutte le ordinarie regole di calcolo.

Quanto ai numeri, che rappresentano, secondo Veronese, i segmenti più generali possibili sopra la retta (2), bisogna ricorrere, per averne l'equivalente aritmetico, ad un criterio costruttivo un po' più generale, che esporrò ben presto.

Noto intanto che, se si tratta solo di formare un sistema di tipo A, il quale, secondo il modo di dire abituale, comprenda elementi infiniti d'ordine infinito, basta applicare ripetutamente il procedimento, testè delineato, partendo per es. dai numeri reali e assumendo ciascuna volta come sistema N ancora quello dei numeri reali. Dopo la prima operazione, abbiamo come sistema A' quello dei miei numeri, più volte menzionati, che si posson dire infiniti e infinitesimi d'ordine finito e generalizzano gli analoghi di Veronese. Assumendo gli elementi di A' come caratteristiche e i numeri reali come indici si possono formare nuovi monosemii e con essi un sistema A''; nel medesimo modo si costruisce un A''' e così di seguito fino ad $A^{(n)}$, per n comunque grande. A partire da A'', ogni sistema contiene elementi con due o più indici sovrapposti, e questo è uno dei modi, con cui si può tradurre in simboli la esistenza di elementi infiniti d'ordine infinito. Ciò non ostante si han sempre insiemi chiusi rispetto a tutte le operazioni aritmetiche.

Fisica. — *Sulla diffusione dei raggi Röntgen* (3). 1ª Nota dei dottori R. Malagoli e C. Bonacini, presentata dal Socio Blaserna.

I. L'esistenza della riflessione dei raggi X è ormai stata assodata sia per mezzo della loro azione fotografica da Battelli e Garbasso (4), da Vicentini e Pacher (5), da Voller e Walter (6), da Sagnac (7) ecc., sia per mezzo delle loro proprietà elettrostatiche dal Villari (8), da Sella e Maiorana (9) ecc.

(1) *Fondamenti di geometria*, ecc. Padova 1891, nn. 87-89 e n. 121, pag. 200.
(2) Ibidem, n. 91 e n. 121, pag. 199.
(3) Lavoro eseguito nel R. Istituto tecnico di Modena.
(4) Nuovo cimento, gennaio 1896.
(5) Memorie del R. Istituto Veneto, 25 gennaio 1896.
(6) Wied. Annalen, 1897, n. 5.
(7) Comptes rendus, 26 luglio 1897.
(8) R. Accad. di Napoli, 15 febbraio 1896.
(9) Rendiconti Lincei, 26 aprile 1896.

Tutti gli operatori sono inoltre concordi nel ritenere che il fenomeno non consista in una riflessione regolare, ma in una diffusione: chè i pochi casi di riflessione regolare finora citati sono alquanto dubbi; e in particolare quello osservato dal Murani [1], viene direttamente contraddetto da Imbert e Bertin-Sans [2], nonchè da Winkelmann e Straubel [3], che sperimentarono nelle stesse circostanze.

Noi fummo fra i primi a far ricerche intorno alla riflessione dei raggi X [4], e dalle nostre esperienze fummo condotti, fra l'altro, a trovare in essa un mezzo per aumentare il rendimento fotografico dei raggi stessi; questione, che era allora di grande importanza, e che altri, come il Troost [5], l'Henry [6], ecc., cercavano di risolvere utilizzando gli effetti di fluorescenza. Noi proponemmo l'adozione di un riflettore metallico (preferibilmente di rame), da collocarsi dietro lo strato sensibile e in contatto intimo con questo; consigliando naturalmente di operare con pellicole, piuttostochè con lastre, per evitare l'assorbimento del vetro. I raggi X che, attraversata la pellicola, vengono diffusi dal riflettore, sommano la loro azione a quella dei raggi diretti, producendo un rinforzo assai sensibile.

Oggi, poichè i tubi *focus*, generalmente in uso, sono delle sorgenti così ricche di raggi X da render perfino possibili delle radiografie istantanee, può sembrare che l'artificio da noi indicato abbia ormai perduto ogni importanza; tanto più che coll'uso di schermi fluorescenti, sovrapposti o sottoposti allo strato sensibile, è stato possibile a taluni di ridurre la posa a meno di $^1/_{30}$ [7]. Non lo neghiamo. Ma nella nostra Nota noi facevamo anche rilevare un altro pregio del riflettore; quello cioè di far evitare nei negativi radiografici quei veli generali, che la maggior parte degli sperimentatori aveva pur lamentato, senza per altro determinarne la causa, nè accennare ad alcun modo per sopprimerli. E concludevamo appunto raccomandando « l'uso del riflet-« tore, il quale concorre ad avvantaggiare la prova, e col suo potere riflet-« tente, *e colla sua opacità* ».

Nessuno sperimentatore, a quanto ci consta, ha raccolto questa nostra conclusione, la quale neppure fu citata dagli autori di trattati sulla radiografia. In compenso, l'abbiamo vista di recente risorgere da più parti, data come cosa nuova!

Nella presente Nota, prendendo appunto le mosse dalla nostra primitiva proposta, che oggi ha acquistato ancor maggior importanza, noi esponiamo

[1] Atti del R. Istituto Lombardo, tomo IX, serie 3ª 1896.
[2] Comptes rendus, 2 marzo 1896.
[3] Wied. Annalen, 1896, n. 10.
[4] Rendiconti Lincei, 26 aprile 1896.
[5] Comptes rendus, marzo 1896.
[6] Comptes rendus, febbraio 1896.
[7] Winkelmann e Straubel, Wied. Ann., n. 10, 1896, pag. 344.

una nuova serie di esperienze e di osservazioni sulla diffusione dei raggi Röntgen.

Ci lusinghiamo che essa possa riuscire di qualche interesse, dappoichè, come giustamente osserva anche il Sagnac [1], nell'ottica geometrica delle nuove radiazioni l'unico fenomeno positivo, e su cui quindi pare si debbano per ora concentrare le ricerche, è appunto quello della diffusione.

II. Il fatto fondamentale accennato nella nostra prima Nota a questo riguardo è il seguente:

Esperienza 1ª. — Sopra uno strato pellicolare di gelatina-bromuro, dalla parte ove arrivano i raggi X, sono disposte, parallelamente e ad una certa distanza fra loro, alcune striscie di piombo, che attraversano la pelli-

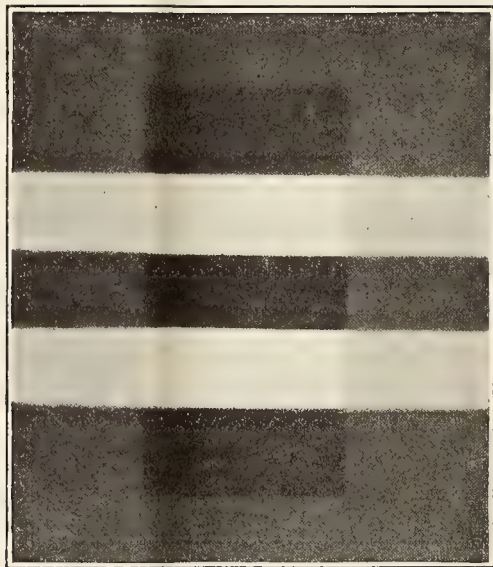



Fig. 1.

cola in tutta la sua larghezza. A contatto della faccia inferiore trovasi, disposto in croce colle lastrine di piombo, un grosso riflettore di rame di forma rettangolare, alquanto più piccolo della pellicola.

Dopo una posa opportuna, si ottiene allo sviluppo un negativo, il quale oltre l'effetto di rinforzo del fondo nella regione che era a contatto del riflettore, mostra come le ombre delle lastrine di piombo sieno pure solo nelle zone corrispondenti al riflettore, e *velate* nel resto (vedi fig. 1).

Questa impressione della pellicola *dietro* a degli ostacoli opachi noi attribuimmo ai raggi X, che arrivando ai corpi sottostanti, vengono da questi diffusi in tutte le direzioni. E ne derivammo appunto la necessità di un riparo metallico da sottoporsi alla lastra durante la posa; il quale poteva, ad un tempo, servire come riflettore.

(1) *Éclairage électrique*, 18 dicembre 1897.

Nei molti lavori usciti dopo la pubblicazione della nostra Nota, abbiamo visto citati più volte fenomeni di impressioni di lastre fotografiche dietro ostacoli perfettamente opachi [1], e farsi innanzi da più parti l'ipotesi che l'aria, la quale appare ormai il veicolo delle azioni elettriche dei raggi X, entri largamente in gioco anche in tutte le esperienze di radiografia. Più particolamente il Röntgen [2] esprime l'idea che l'aria, attraversata da raggi X, ne emetta altri in tutti i sensi, o per vera e propria diffusione o per un fenomeno analogo alla fluorescenza; ed è seguìto in questa idea dal Sagnac [3], dal Villard [4] e da altri. E del resto il Righi [5], il Villari [6] e più tardi il Müller [7] avevano già invocato una specie di diffusione prodotta dall'aria per spiegare certi fenomeni di apparente ripiegamento dei raggi X dietro corpi opachi.

Tutto ciò contribuì a destarci il sospetto che la spiegazione da noi attribuita al fenomeno sopra descritto fosse, se non errata, almeno incompleta. Di qui il punto di partenza per le seguenti ricerche.

III. Per sopprimere completamente la causa da noi invocata, cioè l'azione diffondente dei sostegni, dei corpi vicini, e perfino della carta nera che ordinariamente protegge la lastra sensibile dalla luce, noi ripetemmo l'esperienza sopra citata nel modo seguente:

Esperienza 2ª — Il *focus* ed il rocchetto sono chiusi entro una cassa di legno, da cui i raggi X escono diretti verticalmente verso l'alto. Sul coperchio sono disposte le solite striscie di piombo; su di esse viene adagiata una pellicola fotografica *nuda*, e su questa infine il solito riflettore. L'esperienza era fatta naturalmente a luce inattinica, e nel mezzo di una stanza molto alta, talchè corpi diversi dall'aria, che potessero rimandare raggi sulla pellicola, esistevano solo a qualche metro di distanza da questa.

Allo sviluppo i bianchi dovuti alle striscie di piombo sono *puri in tutta la loro estensione*, a diversità di quel che si ha nell'esp. 1ª; tantochè si ha traccia del riflettore solo dal maggior vigore del fondo nella zona ad esso corrispondente.

Esperienza 3ª. — Il velo nei bianchi, non protetti dal riflettore, ricompare tosto, se si ripete l'esperienza collocando al disopra della pellicola a qualche distanza e in una qualsiasi orientazione, un corpo *qualunque*; anche

(1) Ad es. Villari, Rend. Lincei, 6 giugno 1896; Buguet, Comptes rendus, 2 novembre 1896.

(2) *Sitzungsberichte der Berl. Ak.*, maggio 1897.

(3) Comptes rendus, 19 luglio 1897.

(4) Comptes rendus, 26 luglio 1897.

(5) Rendiconti Lincei, 3 maggio 1896.

(6) Id. id., 6 giugno 1896.

(7) Wied. Ann. 1896, n. 8.

se scelto fra quelli più trasparenti ai raggi X, come ad es. un foglio di carta. Il velo è però tanto più marcato, quanto meno quel corpo è trasparente e quanto meno è distante dalla pellicola.

L' aria, per sè sola, non sembra dunque avere influenza nel fenomeno; o, almeno, il suo potere diffusivo è sì piccolo, che nel tempo di una posa normale diretta non produce effetti apprezzabili.

IV. Per poter escludere completamente un' azione dell' aria nella diffusione, bisognava provare che nessun velo compariva, anche prolungando comunque la durata dell' esposizione. Ma non potendosi far ciò col metodo fin qui tenuto, senza incorrere nell' inconveniente di una sovraesposizione nelle parti del negativo colpite dai raggi X diretti, pensammo di riparare la pellicola dall' azione di questi mediante una lastra di piombo, che la coprisse dalla parte rivolta al tubo, e ripiegantesi lungo i bordi. Così restava come isolata l' azione dei raggi diffusi. E stabilimmo un' esperienza comparativa col seguente dispositivo:

Esperienza 4ª. — Due pezzi *a* e *b* di una stessa lastra sensibile (vedi fig. 2), ravvolti in ugual numero di carte nere, e aventi a contatto

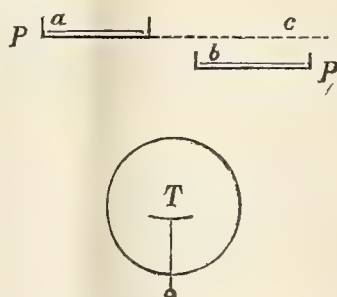



Fig. 2.

dello strato un riflettore metallico, sono protetti dall'azione diretta del *focus* T da due ripari P e P_1 di piombo foggiati a scatola aperta. Sul loro strato sensibile, che guarda verso l' alto, è disposto un intaglio metallico (frapposta una carta). Al fondo di P che è alquanto più alto di P_1 rispetto al tubo, è unito un cartone sottile e perforato c, che sporge su P_1. La lastrina b risente quindi l'azione diffondente di c e della superficie esterna di P, mentre sulla a non possono agire che i raggi per avventura diffusi dall' aria.

Si fa agire il *focus* per un' ora e mezza, e si sviluppano le due lastrine nello stesso bagno. L' impressione in b è vigorosissima, sì da rammentare le prove ottenute direttamente; invece la lastrina a accenna appena con un velo debolissimo l' ombra del disegno che le stava sopra. La fig. 3 riproduce i due effetti, come si osservano nei negativi.

La diffusione di un gas pei raggi X rispetto a quella degli altri corpi risulterebbe dunque di entità trascurabile, se pur esiste; perchè nella nostra esperienza noi non sappiamo escludere in modo assoluto l'effetto del pulviscolo atmosferico e quello del soffitto della stanza che distava circa m. 2,5 dalle lastrine.

In seguito a numerose prove fatte in questo senso, ci siamo persuasi che dietro un riparo opaco rivolto al tubo, cioè utilizzando soltanto dei raggi X indiretti, è possibile ottenere immagini fotografiche aventi le caratteristiche delle radiografie. Ma ciò sempre a condizione che di fronte allo strato sen-

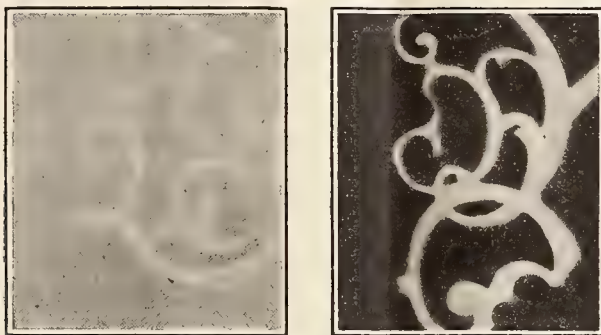



Fig. 3.

sibile, e ad una distanza non troppo forte da esso esista un qualche corpo che possa rimandare i raggi uscenti dal tubo: a questo ufficio non risultando bastevole l'aria.

V. L'esclusione di un potere diffusivo apprezzabile nell'aria è veramente in disaccordo col risultato di un'esperienza che il Röntgen espone nella sua ultima Memoria [1]. Egli, facendo uso del metodo fluoroscopico (senza dubbio meno sensibile del fotografico), ha riconosciuto che la disseminazione dei raggi X dietro corpi opachi diminuisce rapidamente al diminuire della densità dell'aria ambiente.

Dobbiamo confessare che, per quanto abbiamo fatto, non ci riuscì di rimetterci nelle stesse condizioni del Röntgen. E abbiamo allora sperimentato nello stesso senso usando del metodo fotografico.

Due prove radiografiche sono state ottenute successivamente, tenendo la lastra sensibile, dietro il solito riparo di piombo, nell'interno di una campana, nella quale l'aria *caeteris paribus*, una volta era alla pressione ordinaria, e l'altra a 3 mm. di mercurio. Nei risultati non era possibile distinguere alcuna differenza [2].

(1) Loc. cit., n. 1.

(2) Noi non sapremmo escludere che l'esito negativo della nostra esperienza dipenda dalla natura della sorgente dei raggi X adoperata. Avvertiamo però di aver usato *due* tubi

Qui, ben s' intende, non ci si poteva liberare dall' azione diffondente dei sostegni; però la conclusione è conforme ancora alle precedenti, che cioè il potere diffusivo dell' aria, se pur esiste, è trascurabile rispetto a quello degli altri corpi.

VI. Dopo ciò, noi non crediamo di dovere per nulla modificare le nostre idee d'un tempo riguardo al fatto da cui siamo partiti (esp. 1ª); cioè seguitiamo a ritenere che nel fenomeno di diffusione dei raggi X non si debba attribuire all' aria una grande influenza, e tanto meno poi si possa in essa sola, o prevalentemente, ricercare la spiegazione delle diffusioni d' ambiente.

Ciò almeno, per quanto riguarda gli *effetti grafici* dei raggi stessi.

Comunque sia del resto, poichè risulta ormai assodata l' esistenza di una *diffusione d' ambiente*, che noi mettemmo in evidenza fin dall' aprile 1896, riesce pur manifesta la necessità di proteggersi da essa durante l' esposizione e quindi la razionalità del riflettore, da noi allora proposto, appunto anche come riparo opaco. In appoggio di ciò, se pure occorra, notiamo che anche il Röntgen, partendo dall' ipotesi di raggi emessi dall' aria, arriva nella sua ultima Memoria (¹) a consigliare lo stesso riparo. E ancor più di recente A. Buguet pubblica una sua Nota (²) in cui si ripetono, sia pure più ampliate, le nostre antiche considerazioni, per giungere ad una conclusione (data per nuova) che è identica alla nostra.

E del resto, se bene si rifletta, delle semplici ragioni di analogia potevano consigliare il nostro riflettore. Come infatti sarebbe assurdo pretendere di ottenere delle ombre pure, prive di velo, qualora operando colla luce ordinaria si tenesse la lastra entro una scatola a pareti translucide appoggiata a sostegni più o meno trasparenti, così altrettanto lo sarà usando i raggi X. E fa caso invero di trovare ancora in trattati di radiografia (ad esempio in quello del Murani) consigliate ancora le scatole di cartone o di legno ed i sostegni pur di legno, come *il migliore dispositivo* per custodire e sostenere la lastra durante le pose radiografiche.

Ma le seguenti considerazioni chiariranno ancor meglio l' influenza che ha in radiografia la diffusione d' ambiente fin qui trascurata.

VII. Intanto, in base a questa influenza, si può muovere un altro appunto abbastanza grave (oltre quello che noi avemmo a fare nella nostra prima Nota) al metodo fin qui tenuto per fare le *scale di trasparenza* ai

---

di diverso tipo e in diverse condizioni di servizio. Inoltre ricordiamo che il Righi, prima del Röntgen, concludeva negativamente in un' esperienza analoga, fatta col metodo elettrostatico. (Memorie dell'Acc. di Bologna, maggio 1896).

(¹) Loc. cit.

(²) Comptes rendus, 8 novembre 1897.

raggi X; indipendentemente dall'avere le scale stesse un valore *puramente relativo* alla sorgente di raggi X adoperata [1]. Non avendo difatti gli sperimentatori pensato a proteggere le loro lastre sensibili da quella diffusione, questa deve aver prodotto un velo generale nel negativo, che, potendosi ritenere omogeneo in tutta la sua estensione, viene naturalmente ad alterare i rapporti di densità delle singole imagini dei corpi studiati rispetto al fondo.

Volendo liberarsi da questa causa d'errore, nel fare una scala di trasparenze bisognerebbe disporre le cose come nella nostra esp. 2ª, allontanando cioè il più possibile i diffusori. Noi abbiamo appunto fatto alcune esperienze comparative in proposito, e ci siamo persuasi che le differenze non sono di entità trascurabile.

Ma conviene notare che il risultato sarebbe ancora corretto, se, pur operando nel modo ordinario, si tenesse a contatto dello strato sensibile il riflettore metallico da noi consigliato: chè difatti la presenza di questo, oltre assicurare la purezza dei bianchi, importa nelle singole immagini aumenti di densità proporzionali alla trasparenza di ciascun corpo studiato. Non si alterano quindi i rapporti di densità rispetto al fondo.

E poichè le radiografie in generale sono delle immagini ottenute appunto per trasparenza, e d'altra parte non è sempre possibile mettersi nelle condizioni della nostra esp. 2ª, non sarebbe questa l'ultima ragione per cui l'uso del nostro riflettore appaia razionale e vantaggioso.

Non solo poi in quanto riguarda le scale di trasparenza, ma in ogni altro ordine di esperienze radiografiche, sarebbe ormai dato di rilevare delle inesattezze, dovute alla trascuranza degli effetti delle diffusioni estranee. Ci limiteremo a farlo ora per una sola, che più delle altre si connette coll'argomento che trattiamo: non senza però aver prima fatto notare, che una esperienza preliminare condotta come la nostra 1ª, si presti *in ogni caso* per stabilire l'entità delle diffusioni dipendenti dal dispositivo speciale adoperato.

VIII. Alla critica che stiamo facendo va particolarmente soggetto il metodo di Röntgen per lo studio della riflessione dei corpi, e che consiste nel situar questi dietro lo strato sensibile per vederne l'impronta palesarsi in una tinta più cupa del fondo.

E qui non sarebbe neppure il caso di consigliare il riflettore; perchè i rinforzi che esso produrrebbe nelle immagini dei singoli corpi sarebbero evidentemente legati alla trasparenza di questi. Risultati corretti non si possono dunque avere con questo metodo, se non quando si ricorra al disposi tivo della nostra esperienza 2ª.

[1] Ròiti, Rend. Lincei, luglio 1896. — Röntgen, 3ª Memoria.

Tale imperfezione a noi preme di rilevare, innanzi tutto perchè è senza dubbio in causa di essa che nelle nostre prime esperienze [1] fummo condotti, come già del resto il Röntgen [2] ed il Villari [3], a ritenere nullo il potere diffusivo dell'alluminio. Ed anche perchè su esperienze eseguite col metodo Röntgen, recentemente Voller e Walter [4] hanno voluto stabilire un nesso fra il potere diffusivo dei diversi corpi semplici e la distribuzione dei corpi stessi nel sistema periodico di Mendeleeff; ora siffatte conclusioni non ci appaiono al sicuro da ogni obbiezione.

IX. Volendo far ricerche sul potere di diffusione dei diversi corpi, evitando la causa d'errore ora accennata, noi abbiamo quindi abbandonato il metodo Röntgen per quello diretto; facendo cioè arrivare su di una lastra fotografica solamente i raggi riflessi.

Sui risultati delle nostre esperienze riferiremo prossimamente in altra Nota.

Fisica. — *Emissione contemporanea di raggi ortocatodici da ambedue gli elettrodi e proprietà della luce violacea nei tubi del Crookes.* Nota del dott. Alessandro Sandrucci, presentata dal Socio Blaserna.

Oltre i raggi che Silvanus Thomson chiama *ortocatodici*, cioè gli ordinarî raggi che, irradiando dal catodo, provocano la fluorescenza sul vetro anticatodico, vi portano carica elettrica negativa e sono deviabili da una calamita, il Perrin [5] e, sopra maggior fondamento sperimentale, il Villari [6], ammettono anche nei tubi a vuoto l'esistenza di raggi *anodici*, i quali, invece di seguire come i primi un cammino rettilineo, si diffondono tutto intorno, apportando ovunque carica positiva, e, secondo il Perrin, sentono persino l'azione del campo magnetico. Più recentemente C. Maltèzos [7], studiando la fosforescenza antianodica ed i suoi mutamenti di aspetto sotto l'azione di un conduttore in comunicazione col suolo, è venuto anche lui ad ammettere l'esistenza di raggi anodici. Parrebbe che egli intendesse sotto

[1] Nota citata.

[2] Prima Memoria.

[3] R. Accademia di Napoli, 15 febbraio 1896.

[4] Loc. cit.

[5] Perrin, *Nouvelles propriétés des rayons cathodiques* (Comptes rendus, v. 121, pag. 1130).

[6] Villari, *Sulle cariche e figure elettriche alla superficie dei tubi del Crookes e del Geissler*. Rend. Accad. d. Lincei, maggio 1896.

[7] Maltèzos, *Sur un système phosphorescent antianodique et les rayons anodiques.* (Comptes rendus, 24 Mai 1897).

questo nome qualche cosa di ben diverso che il Villari ed il Perrin se non dicesse che i suoi raggi anodici, *si diffondono e non arrivano sino al vetro nella maggior parte del tempo*. Egli trova una semplice analogia tra il sistema anticatodico e l' antianodico, soggiungendo però subito, *quanto ai resultati sul vetro ;* e circa la luce violacea emanante dall' anodo (luce anodica) dice solo che subisce spostamenti sotto l' azione del conduttore anzidetto e che gli sembra intimamente legata al sistema antianodico.

Ho voluto dal canto mio e mediante l' aiuto del campo magnetico ricercare se i raggi anodici del Perrin e del Villari siano realmente gli stessi di quelli del Maltèzos e che abbia a che fare con gli uni e gli altri la luce violacea emanante dall' anodo. Tralascio la descrizione dei tubi usati, perchè sono quelli descritti nella Nota *Fosforescenza del vetro* ecc. (N. Cimento, novembre 1897), come pure non parlo nè dell' eccitazione dei tubi nè del campo magnetico, perchè sono accennati nella Nota precedente e più ampiamente descritti nel lavoro *Azione del magnetismo sulla direzione dei raggi catodici e sulla produzione di questi e degli X* di imminente pubblicazione nel N. Cimento. Passo agli esperimenti e ai risultati.

Tubo n. 1. Uso come anodo il disco e come catodo quello degli elettrodi filiformi che sta più vicino all' antianodo. A *scarica forte* il pallone è vivamente fluorescente su tutta la sua superficie, e, sotto l' azione magnetica, non si scorge altro spostamento che quello della fluorescenza anticatodica, seguente la legge confermata nel lavoro già citato. A *scarica debole* (ottenuta senza reostato ma variando opportunamente il contatto dei cilindretti in platino dell' interruttore rapido Klingenfürst) si ha macchia fluorescente cinerea all' anticatodo e di fronte al disco anodico appare come una larva della fluorescenza che si avrebbe se il disco fosse catodo. Quando agisce il magnete le due fluorescenze si spostano come se i due elettrodi emettessero contemporaneamente in senso opposto raggi seguenti le medesime leggi di spostamento nei campi magnetici. Il fenomeno non può essere dato da riflessione di ortocatodici con conseguente produzione di paracatodici (Thomson), perchè, fra l' altro, rimane inalterato quando si prende come catodo uno degli altri due elettrodi filiformi, che sono in posizione diversissima: nè da raggi X, per la deviabilità magnetica. Sprizzando sul tubo con un soffietto le solite polveri elettroscopiche (minio-solfo), ho a scarica debole minio (carica negativa) all' anticatodo e solfo (positiva) in quasi tutto il rimanente del pallone e persino di fronte al disco anodico, dove non appare traccia di carica negativa. L' emissione di ortocatodici da parte dell' anodo, rivelata dall' azione magnetica, è quindi, come era da aspettarsi, assai debole (1).

(1) Il Maltèzos (Comptes rendus, 16 Mai 1897) con un pallone ad elettrodi filiformi, uno doppio dell' altro in lunghezza, ha osservato, specialmente usando il più lungo come catodo, sulla parete delle bande parallele al filo, alternatamente, oscure e luminose, invece di una zona fosforescente. Usando nel mio tubo i due elettrodi filiformi opposti

Tubo n. 2. Elettrodi in piani ortogonali. Colloco orizzontale l'asse del tubo, ed orizzontale anche l'elettrodo laterale: la scarica è forte. Dall'anodo parte una nappa di luce violacea a forma di pina che, diminuendo in intensità, si diffonde pel tubo, piegando in alto un po' verso il catodo (elettrodo terminale). All'antianodo una macchia color marrone, di 3-4 mm. di diametro, circondata da un anello più scuro, a sua volta attorniato da una macchia irregolare fluorescente in verde più intensamente che non il rimanente della parete. È il sistema fosforescente antianodico del Maltèzos. Sprizzo le polveri elettroscopiche. Appare carica positiva su quasi tutto il tubo, negativa nelle vicinanze del catodo. All'anticatodo, parte centrale negativa circondata da carica positiva uniformemente diffusa; all'antianodo una porzione centrale negativa, circondata da un anello positivo, poi un anello neutro e quindi carica positiva uniformemente diffusa. Colloco il polo sud dell'elettrocalamita lateralmente al tubo, a destra della corrente ortocatodica e di fianco all'anodo (polo nord verticalmente in basso): il sistema antianodico mi si sposta verso il catodo di circa un centimetro, rimanendo però inalterata la sua disposizione e la distribuzione delle cariche elettriche; cioè, secondo la legge nota, *come se l'anodo fosse un catodo.* Ne ho una riprova facendo funzionare da catodo l'elettrodo laterale e usando il magnete e le polveri; solo in questo caso il sistema anticatodico è più potente, più ampia ed irregolare la regione negativa, ma scompare l'anello positivo. Sotto l'azione magnetica, quando è catodo l'elettrodo terminale, la nappa violacea *piegasi energicamente verso l'anticatodo.* Spostando il magnete, variando la direzione delle linee di forza, posso accertarmi che la luce violacea si sposta nel campo magnetico con legge proprio opposta a quella che seguono gli ortocatodici. Se fa da catodo l'elettrodo laterale, la luce violacea è in maggior quantità, riempiendo il tubo per un buon terzo, e circonda completamente il nuovo anodo. Ponendo di fianco a questo il magnete nella posizione identica a quella sopra indicata, la luce anodica si allarga e si dispone a fascia spirale lungo la parete del tubo: è come attratta dal magnete. Vicino all'anodo (alla distanza di 3 cm.) ma dalla parte apposta al magnete, comparisce una strisciolina fluorescente in verde e lunga cm. 1 $\frac{1}{2}$, la quale, occupando il posto che occuperebbe sotto l'azione del magnete la fluorescenza ortocatodica se l'attuale anodo fosse catodo, conferma che dall'anodo parte una radiazione in tutto conforme alla ortocatodica.

---

diametralmente, che sono identici in tutto, ho avuto le bande solo usando uno di essi come catodo, mentre coll'altro mi si è presentata sempre la zona fluorescente. I due elettrodi sono contenuti in due capezzoli di dimensioni differenti, essendo quello dell'elettrodo che dà le striscie più corto ma assai più largo dell'altro. Questa è forse la causa delle mancanza di bande per l'elettrodo che ha intorno a sè un tubo più ristretto.

Tubo n. 3. Disposto come il precedente. Se fa da catodo l' elettrodo concavo terminale, il sistema antianodico non comparisce; coll' uso delle polveri si scopre all' antianodo una strisciolina ellittica, larga 3 mm., allungatissima nel senso dell' asse del tubo, con carica negativa (lo spazio intorno è positivo); questa subisce i soliti spostamenti magnetici come se fosse data da ortocatodici. Se fa da catodo l' elettrodo laterale, il sistema anticatodico presenta intensamente i movimenti segnalati dal Ròiti: le polveri scoprono due regioni a contorno regolarissimo e pressochè circolare, eguali e aventi una parte comune e 12 mm. di diametro, una con carica positiva, l' altra negativa; sono circondate da una piccola regione neutra, oltre la quale si ha carica positiva. Funzionando il magnete, il sistema si sposta regolarmente, ma rimane la sola regione negativa. La luce violacea presenta resultati identici a quelli ottenuti col tubo precedente.

Tubo n. 4. È tenuto orizzontale. Funzionando da catodo l' elettrodo semicilindrico, non appare luce violacea e tutta la porzione fra anodo e catodo è ben fluorescente. Ponendo nelle solite condizioni il magnete col polo sud di fianco al catodo, la fluorescenza verde, riducendosi ad una porzione ristrettissima vicino al catodo e in opposizione al polo, mette allo scoperto la luce violacea, che si foggia a spirale e si sposta precisamente come è detto in ciò che precede.

Conclusioni.

1ª. I due elettrodi emettono contemporaneamente raggi *ortocatodici*; solo li sviluppa più intensamente quello che comunica col polo negativo dell' apparecchio eccitatore.

2ª. Dagli elettrodi, almeno sotto una certa rarefazione (2° stadio del Ròiti), sembra partano come due coni di radiazioni, chiusi uno dentro l' altro o in parte separati, portanti cariche di nome opposto. Ambedue sono spostati dal magnete con identica legge.

3ª. La luce violacea anodica risente, al pari degli ortocatodici, intensamente l' azione magnetica, ma segue una legge opposta, comportandosi come una corrente elettrica rettilinea muoventesi da anodo ad antianodo.

4ª. Sembra scaturire da questi esperimenti che il sistema antianodico del Maltèzos non sia forse che un sistema anticatodico affievolito, perchè fra i due sistemi più che una analogia corre una vera identità e non soltanto per quel che concerne gli effetti sul vetro. La distinzione posta dal Maltèzos di raggi catodici ed anodici può ritenersi semplicemente atta ad indicare il luogo di provenienza delle radiazioni; perchè a voler rinvenire negli anodici una differenza sostanziale cogli ortocatodici, converrebbe supporre che gli anodici del Maltèzos fossero i raggi formanti quello dei due coni irradianti dall' anodo che porta carica positiva; ma questi ultimi non si diffondono (dovendosi ben distinguerli dall' agente che provoca la fluorescenza generale

del tubo e che non risente quasi affatto l'azione magnetica, come le polveri elettroscopiche mi han già dimostrato) e di più raggiungono continuamente il vetro e possono venire emessi anche dal catodo, come ha mostrato il tubo n. 2. Finalmente il presunto legame intimo fra la luce violacea, che sembrerebbe rimanere l'unica caratteristica dell'anodo, e le altre emanazioni anodiche, non può dedursi dal fatto che la detta luce si sposta contemporaneamente ad esse; perchè allora con egual ragione potrebbe dirsi che vi è anche cogli ortocatodici i quali vengono nello stesso tempo spostati.

Gli esperimenti fatti non sono riusciti a mettere bene in evidenza gli anodici del Perrin e del Villari: ma potrebbe darsi che questo dipendesse dal non essere esatto che anche tali raggi, se raggi possono chiamarsi, risentano l'azione del magnetismo.

COMITATO SEGRETO

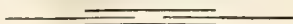
Il Socio Beltrami, nell'assumere la presidenza, pronuncia un breve discorso per ringraziare i Colleghi della prova di affetto e di stima datagli colla sua nomina a Presidente dell'Accademia. Egli fa appello alla cooperazione e al buon volere dei Soci, affinchè l'Accademia prosegua sempre meglio nell'opera sua a vantaggio degli studî italiani; e chiude il proprio discorso col mandare un riverente saluto alla memoria del compianto suo predecessore, senatore Brioschi, che per tanti anni e tanto degnamente tenne la presidenza del sodalizio linceo.

In seguito a dimanda fatta da alcuni Soci viene invertito l'ordine del giorno, e si procede alla elezione dell'Amministratore, in sostituzione del Socio Tommasini, le cui dimissioni furono già accettate dall'Accademia.

Votanti 30. — Il Socio Tacchini ebbe voti 27. — Schede bianche 3. — Eletto Tacchini.

Il Presidente Beltrami dà comunicazione di una lettera nella quale il Socio Cerruti insiste nelle sue dimissioni dall'ufficio di Amministratore aggiunto.

Dopo alcune osservazioni dei Soci Tommasi-Crudeli e Blaserna, l'Accademia prende atto delle dimissioni del Socio Cerruti da Amministratore aggiunto e delibera di pregarlo di rimanere in carica fino alla prossima adunanza generale, affinchè la nuova amministrazione possa valersi per qualche tempo del suo efficace ajuto; assicurandolo sin d'ora che in quella adunanza si provvederà a nominargli un successore.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 marzo 1898.

E. BELTRAMI Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica terrestre. — *Il terremoto nell' Emilia della sera del 4 marzo 1898.* Nota del Socio P. TACCHINI.

Colle notizie finora pervenute all' Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, circa un centinaio, risulta che questo terremoto ha avuta una grandissima estensione e sembra fortunatamente che in nessun luogo abbia raggiunta un' intensità tale da produrre danni. Ciò starebbe a provare che si ha da fare con una scossa originatasi ad una grande profondità. Il movimento è stato sensibilissimo da Piacenza a Modena e forse è provenuto dall'Appennino, a giudicare dal fatto che fu abbastanza forte anche nella Garfagnana, dove raggiunse il grado VI della scala *De Rossi-Forel.*

Le località più lontane fino ad oggi conosciute, dove il terremoto è stato più o meno leggermente sentito, sono: Rovigo e Argenta (Ferrara) verso l' est; Spinea di Mestre, Bassano vicentino e Schio verso il nord-est; Salò e Brescia verso il nord; Como e Vigevano verso il nord-ovest; Novi Ligure e Genova all'ovest; la Riviera di levante verso il sud-ovest; Livorno e Firenze verso il sud.

A distanze ancor maggiori, come a Siena, Roma ed Ischia, il passaggio delle onde sismiche, resesi insensibili all' uomo, è stato registrato dagli strumenti sismici.

In quanto all' ora della scossa, i dati orari più attendibili oscillano tra $22^h\,5^m$ e $22^h\,8^m$, e la discordanza può naturalmente imputarsi anche alla distanza diversa dall' epicentro delle varie località.

Zoologia. — *Diagnosi di un nuovo genere e nuova specie di Anellidi della famiglia degli Enchytraeidae.* Nota del Corrispondente Carlo Emery.

Nell' esplorare i ghiacciai che circondano il monte S. Elia nell'Alaska, il Russel ebbe ad osservare dei piccoli vermi neri, frequenti nei giorni nebbiosi alla superficie della neve, ma che sparivano appena si mostrasse il sole. Gli stessi vermi furono veduti sul ghiacciaio di Malaspina durante la spedizione felicemente compiuta sotto il comando di S. A. R. il Duca degli Abruzzi: il dott. Filippo De Filippi che faceva parte della spedizione ne raccolse alcuni esemplari che sono oggetto di questa Nota. Rappresentano un nuovo genere e nuova specie di cui segue la diagnosi.

Melanenchytraeus n. g.

Ipoderma pigmentato: tutti i segmenti con fasci dorsali e ventrali di quattro setole ciascuno; queste sono leggermente sigmoidi, più lunghe quelle dei segmenti anteriori. Il fascio ventrale manca nel 12° segmento, in corrispondenza dello sbocco del condotto escretore maschile. Questo è molto lungo e forma un' ansa convoluta che si estende fino nel 15° segmento; prima del bulbo sferico che trovasi allo sbocco, offre un rigonfiamento fusiforme; inoltre riceve ghiandole prostatiche. I sacchi spermatici sono ampi, e si estendono per parecchi segmenti. I ricettacoli del seme non comunicano con l' intestino; sono in continuità l' uno coll' altro ed hanno ciascuno, alla base della loro ampolla, due o tre diverticoli. I nefridii sono molto convoluti con pochi nuclei. Il vaso dorsale incomincia nel 12° segmento e racchiude una ghiandola cardiaca. Esiste un poro cefalico, ma non vi sono pori dorsali. Nell' epitelio del faringe, si trovano numerose cellule pigmentate ramificate; non vi sono ghiandole salivari e l' esofago si continua senza limite con l' intestino. Nei segmenti 4-8 la cavità viscerale è in gran parte occupata da ghiandole unicellulari, i cui lunghi e sottili condotti sboccano all' esterno in vicinanza dei gruppi ventrali di setole.

M. solifugus n. sp.

I più grandi esemplari misurano poco più di un centimetro, con un diametro che negli individui conservati nell' alcool e bagnati in acqua, è di $1/3$ di millimetro circa. Il corpo è cilindrico, indistintamente assottigliato posteriormente, il lobo cefalico ritondato. In un esemplare, ho contato 53 segmenti. Colore bruno scuro, quasi nero.

Per le setole sigmoidi, l' esistenza del corpo cardiaco e i nefridii molto convoluti, il genere *Melanenchytraeus* si avvicina a *Mesenchytraeus*. Ne differisce principalmente pel lungo condotto escretore maschile. L' intensa pigmentazione dell' ipoderma e di altri organi non si ritrova a mia conoscenza in altri Enchitreidi.

Una descrizione particolareggiata con figure, farà parte del libro che sotto gli auspicî del Principe, sarà pubblicato intorno ai risultati del suo viaggio.

Matematica. — *Sulla trasformazione di una curva algebrica in un'altra priva di punti multipli.* Nota di Beppo Levi, presentata dal Corrispondente C. Segre.

È noto che, data una curva C dello spazio ordinario, si può, con trasformazioni birazionali della curva, mutarla in un' altra, pure del nostro spazio, priva di singolarità puntuali [1]. Può però talora interessare di rispondere alla domanda: può una tale trasformazione effettuarsi con trasformazioni birazionali dello spazio (Cremoniane)? La risposta è affermativa, e la dimostrazione che io dò qui brevemente non è, parmi, meno semplice delle dimostrazioni note in cui non si tien conto di questa maggior condizione.

Si sa che con trasformazioni birazionali dello spazio (ad es. quadratiche) si può trasformare la curva data C in una C_1 che abbia sole singolarità ordinarie (punti multipli a tangenti distinte) [2]. La curva C_1 abbia ora il punto P s-plo (ordinario). Si effettui una trasformazione birazionale, tale che non esista, nello spazio di C_1 una superficie fondamentale cui corrisponda un solo punto nello spazio trasformato; ad es, una trasformazione cubica dello spazio a sestica fondamentale Δ non degenere [3], disponendo di Δ in modo che

[1] È noto anzi di più: ogni curva può ottenersi come proiezione di una di un conveniente spazio priva di singolarità (Veronese, *Das Princip des Projicirens u. Schneidens*, Math. Ann. 19; Segre, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*, Ann. di mat. (2) 25, p. 43 e seg.). La proiezione di questa curva da un conveniente spazio su un S_3 dà luogo alla curva cercata. Si hanno inoltre dimostrazioni dirette del teorema (Poincaré, *Sur les tr. bir. des courbes gauches algébriques*. Comptes rendus, t. 117; Pieri, *Trasf. di ogni curva alg. in altra priva di punti multipli*, Rivista di mat. 1894).

[2] Del Pezzo, Rend. Palermo, 6; Pannelli, Rend. Ist. Lombardo (2), 26; Segre, l. c. p. 9; Levi, Ann. Mat. (2), 26 e Mem. Acc. Sc. di Torino 1898.

[3] Questa trasformazione fu già applicata con profitto (specialmente in suoi casi particolari) in altre ricerche da parecchi autori che sarebbe inutile qui ricordare; nella sua generalità fu incontrata dal prof. Cremona *(Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre.* n.i 113 e 113bis. Crelle's Journal 69) e studiata dal Cayley *(On*

passi per P [1] e che i piani tangenti comuni in P a A e a C_1 non vi siano bitangenti a C_1 e non siano tangenti alla rigata fondamentale λ. C_1 si trasforma in una nuova curva C_2 in cui a P corrispondono s punti distinti della retta p' corrispondente a P appartenente a λ', nessuno dei quali appartiene a A'. Questi punti sono tutti semplici per C_2. Lo si vede facilmente p. e. con un' enumerazione, supponendo che si sia disposto della trasformazione in modo che A non passi per altri punti di C_1 e che λ seghi C_1 in punti semplici distinti di cui mai due sulla stessa generatrice, il che si può sempre fare [2]. Se m è l' ordine di C_1, quello di C_2 è $3m - s$; inoltre C_2 ha $8m - 3s$ punti su A'. A' è tripla per λ': il numero delle intersezioni di λ' e C_2 fuori di A' è quindi

$$8(3m - s) - 3(8m - 3s) = s;$$

gli s punti di C_2 su p' sono dunque semplici.

Essendo inoltre C_1 disposta come or ora si è detto, la trasformazione non genera nuovi punti multipli; inoltre tutti i punti multipli di C_1 diversi da P si mutano in punti di C_2 ancora multipli ordinari (di ugual moltiplicità). Applicando adunque successivamente nuove trasformazioni analoghe a quella precedente si elimineranno a uno a uno i punti multipli della curva.

---

the rational transformation between two spaces n.^{i} 101 e seg. Proc. of the London math. Society vol. III, 1869-71 e Mathematical Papers vol. VII, p. 189) e dal sig. Noether (*Ueber d. eind. Raumtransformationen v. s. w.* Math. Ann. III, p. 547; (V. pure Salmon-Friedler, *Anal. Geom. d. Raumes*). In quest'ultima Memoria sono studiati pure i casi particolari. Io considero il caso generale, solo per fissare le idee; potrebbe scegliersi invece uno qualunque dei casi particolari, esclusi quelli indicati con (E) e (G) dal sig. Noether (il caso che le superficie cubiche del sistema omoloidico abbiano un punto doppio fisso e quello della trasformazione cubica a tetraedro fondamentale).

Detti Σ e Σ' i due spazi, la trasformazione fa corrispondere ai piani di Σ le superficie cubiche di Σ' per la sestica gobba di genere 3 A' e ai piani di Σ' le sup. cubiche di Σ per l'analoga sestica A. La superficie fondamentale della trasformazione è in Σ la rigata λ dell'ottavo ordine delle trisecanti di A; analogamente per la superficie fondamentale λ' di Σ'. A ogni punto di A corrisponde una generatrice di λ' e al fascio di direzioni uscenti da P in un piano tangente a A un punto di questa generatrice, essendo proiettiva la risultante corrispondenza fra quei piani tangenti e questi punti. A è tripla per λ, A' per λ'.

La trasformazione si può generare facendo corrispondere a ogni punto di Σ il punto di Σ' intersezione dei tre piani corrispondenti in tre correlazioni.

[1] In generale, qualunque sia la trasformazione che si voglia sostituire, come or ora si è detto, a quella che qui si usa, si dovrà far cadere in P un punto fondamentale o farvi passare una linea fondamentale, soddisfacendo inoltre a condizioni analoghe a quelle indicate nel testo.

[2] Determinato A in modo arbitrario purchè soddisfi alle condizioni imposte in P e non giaccia sul cono proiettante C_1 da P basta sostituirle una sua trasformata per una conveniente omologia di centro P per ottener soddisfatte queste condizioni.

Il teorema e la dimostrazione si estendono evidentemente alle curve immerse negli spazî superiori. Basterà far uso p. e. della trasformazione che si ottiene come generalizzazione di quella cubica del nostro spazio facendo corrispondere ad un punto dell' S_n il punto d'intersezione degli $n\, S_{n-1}$ corrispondenti nel secondo spazio in n correlazioni.

Matematica. — *Sui numeri transfiniti.* Nota di T. Levi-Civita [1], presentata dal Corrispondente Veronese.

4. Prescindiamo, per i sistemi N, dall'assioma di Archimede, e indichiamoli, in tal condizione, con M. Son questi evidentemente sistemi assai generali, richiedendosi soltanto che i loro elementi sieno ordinati e costituiscano un corpo rispetto alla somma e alla sottrazione, cioè, ripetiamolo ancora una volta, rispetto a due operazioni, comunque definite, che sieno algoritmicamente identiche alla somma e alla sottrazione, talchè i segni $>$ e $<$, $+$ e $-$ continuino a soddisfare alle regole ordinarie.

Ogni sistema di tipo A, ovvero di tipo N è senz'altro un M, ma non reciprocamente.

Consideriamo per es. i monosemii a_ν con indice e caratteristica reali. Ad ogni aggregato di monosemii, i cui indici costituiscano un insieme ellittico, si può far corrispondere, come sappiamo, un numero a' di un nuovo sistema di tipo A. Se ci limitiamo a quegli a', che constano (cioè, si può anche dire in questo caso, sono somma) di *un numero finito* di monosemii a caratteristica intera e indice intero e positivo (o nullo), abbiamo ancora un insieme ordinato $V^{(1)}$, i cui elementi formano un corpo rispetto alla somma, alla sottrazione e alla moltiplicazione [2]; dunque intanto un sistema di tipo M. Esso non è però nè A, nè N. Non è A, perchè in generale la divisione fa uscire dagli elementi dell'insieme; non è N, poichè non vale l'assioma di Archimede; e, per verità, fissiamo i tre elementi $\omega = 1_1$, $\omega' = 1$, $\omega'' = 2$. Si ha $\omega'' > \omega'$, ma, comunque si prenda il numero intero k, riman sempre (§ 2) $\omega > k(\omega'' - \omega')$.

Sia in generale ω elemento di un sistema M; anche $-\omega$ appartiene al sistema. Chiamerò, come di solito, valore assoluto di ω (e lo designerò con $|\omega|$) quello dei due numeri ω, $-\omega$, che non è negativo.

[1] V. pag. 91.

[2] È chiaro che $V^{(1)}$ coincide sostanzialmente col sistema dei numeri interi di Veronese, infiniti di ordine finito; basterebbe designare ogni monosemio a_ν (dove a e ν si intendono ora interi e $\nu \geq 0$) con $a\,\infty^{\nu}{}_1$.

Due elementi non nulli ω ed ω' di M si diranno *finiti* tra di loro e si scriverà $\omega \doteq \omega'$, quando esiste un numero intero e positivo k, tale che il maggiore dei valori assoluti, poniamo $|\omega|$, sia più piccolo di $k|\omega'|$. Se non esiste un tal numero k, si dirà ω *infinito rispetto ad* ω' ($\omega \dot{>} \omega'$), ovvero ω' *infinitesimo rispetto ad* ω. Si vede facilmente che i segni $\doteq$ $\dot{>}$ e $\dot{<}$ si comportano al tutto come gli analoghi $=$, $>$ e $<$.

Fissato ad arbitrio un elemento ω di M, è sempre possibile immaginare un sistema di tipo N, che comprende ω ed è contenuto in M. Infatti tale sistema sarà per lo meno costituito dagli elementi:

$$\ldots, -2\omega, -\omega, 0, \omega, 2\omega, \ldots,$$

che formano un corpo rispetto alla somma e alla sottrazione e soddisfanno all'assioma di Archimede (per es. sotto la forma, indicata a § 1). Se tutti gli elementi di M sono finiti con ω, lo stesso M è un N; in caso diverso esisterà un qualche elemento ω', non finito con ω, e potremo considerare un secondo sistema di tipo N, che lo comprende. Due tali sistemi non hanno, all'infuori dello zero, alcun elemento comune, anzi è manifesto che gli elementi non nulli dell'uno sono tutti infiniti, ovvero tutti infinitesimi, rispetto ad ogni elemento non nullo dell'altro. Chiamerò *indipendenti* due qualunque sistemi N', N'', che si trovino in questa condizione e scriverò $N' \dot{\gtrless} N''$, secondochè gli elementi di N' sono infiniti od infinitesimi, rispetto a quelli di N''.

Ancora, denominerò *intero* un sistema M, se esiste una varietà, del resto qualunque, di sistemi N indipendenti (che dirò, per brevità, *generatori*), tali che ogni elemento di M sia somma di un numero finito di elementi di questi sistemi.

Nei sistemi interi rientrano come caso particolare quelli di tipo N, che ammettono un unico sistema generatore e coincidono con esso. Intero è anche il sistema $V^{(1)}$, ricordato poc'anzi, i cui elementi risultano dalla somma di un numero finito di monosemii a_ν. Infatti tutti gli a_ν, che hanno un medesimo indice ν, costituiscono, al variare di a, un sistema di tipo N; a valori diversi dell'indice corrispondono sistemi indipendenti; sono dunque sistemi generatori i singoli a_ν, ν potendo assumere i valori $0, 1, 2, \ldots$.

5. Vengo finalmente al punto essenziale di questo scritto, che è di generalizzare la deduzione di un sistema A' da un dato A, usufruendo di un sistema intero M, anzichè di un N, come si è fatto a § 2.

Sieno $a, b, \ldots$ elementi di A; $\nu, \mu, \ldots$ elementi di M. Formo in primo luogo i monosemii a_ν, adottando le stesse convenzioni ordinative e operative che a § 2. Definisco poi degli insiemi di elementi di M nel modo seguente:

Dati n sistemi generatori indipendenti $N^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ di M [1] e supposto, come è sempre permesso:

$$N^{(n)} > N^{(n-1)} > \cdots > N^{(1)},$$

fisso in $N^{(n)}$ un insieme ellittico $\nu^{n) p_n}$ $(p_n = 0, 1, 2, \ldots)$; per ogni elemento $\nu^{n) p_n}$ un insieme ellittico $\nu^{n-1) p_n p_{n-1}}$ $(p_{n-1} = 0, 1, 2, \ldots)$ in $N^{(n-1)}$, e così di seguito; infine, per ogni elemento $\nu^{2) p_n p_{n-1} \cdots p_2}$, un insieme ellittico $\nu^{1) p_n p_{n-1} \cdots p_2 p_1}$ $(p_1 = 0, 1, 2, \ldots)$ in $N^{(1)}$. Chiamo *iperellittico d'ordine n* l'insieme Y di tutti gli elementi di M, che risultano dalla somma di un $\nu^{n) p_n}$ con un $\nu^{n-1) p_n p_{n-1}}, \ldots,$ con un $\nu^{1) p_n p_{n-1} \cdots p_2 p_1}$.

Ad ogni insieme di monosemii, i cui indici costituiscono un insieme iperellittico, faccio corrispondere un nuovo ente a'. È possibile stabilire fra questi a' le relazioni di disuguaglianza e le operazioni aritmetiche in modo da avere ancora un sistema di tipo A?

La risposta è affermativa.

Per riconoscerlo, giova prima di tutto osservare come, dati due a' (o in generale un numero finito di essi), si può sempre ritenere che gli indici dei loro monosemii risultino dai medesimi sistemi generatori.

Siano infatti due numeri a' e b' e gli insiemi iperellittici corrispondenti, d'ordine rispettivo $m + h$, $m + k$, provengano dai sistemi generatori:

$$N'^{(1)}, N'^{(2)}, \ldots, N'^{(m)}, N''^{(1)}, N''^{(2)}, \ldots, N''^{(h)};$$
$$N'^{(1)}, N'^{(2)}, \ldots, N'^{(m)}, N'''^{(1)}, N'''^{(2)}, \ldots, N'''^{(k)},$$

di cui son messi in evidenza quelli comuni ai due insiemi, senza badare alle relazioni di infinità.

È chiaro che, facendo $m + h + k = n$ e designando $N'^{(1)}$ con $N^{(r_1)}$, $N'^{(2)}$ con $N^{(r_2)}, \ldots, N'^{(m)}$ con $N^{(r_m)}$; $N''^{(1)}$ con $N^{(r_{m+1})}, \ldots, N''^{(h)}$ con $N^{(r_{m+h})}$; $N'''^{(1)}$ con $N^{(r_{m+h+1})}, \ldots, N''^{(k)}$ con $N^{(r_n)}$ (dove le r_i si immaginano prese in guisa che riesca $N^{(n)} > N^{(n-1)} > \cdots > N^{(1)}$). Y e Z si possono risguardare come insiemi iperellittici d'ordine n, corrispondenti ai medesimi sistemi generatori $N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n)}$.

Basta ritenere, per ogni elemento di Y, nulle le $\nu^{r_{m+1}) \cdots}, \nu^{r_{m+2}) \cdots}, \ldots \nu^{r_{m+h}) \cdots}$ (e prescinder quindi, nelle ν dei sistemi inferiori, dagli apici $p_{r_{m+1}}, p_{r_{m+2}}, \cdots, p_{r_{m+h}}$); per ogni elemento di Z, nulle invece le $\nu^{r_{m+h+1}) \cdots}, \nu^{r_{m+h+2}) \cdots}, \ldots, \nu^{r_n) \cdots}$, (e prescindere analogamente dagli apici $p_{r_{m+h+1}}, \cdots, p_{r_n}$).

Ciò posto, considero l'insieme $\}N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n)}\{$ (che dirò *d'ordine n*) di tutti i numeri a', che corrispondono ad insiemi iperellittici costituiti coi

[1] L'intero n è affatto arbitrario, purchè, si capisce, non superiore al numero totale dei sistemi generatori di M, caso mai questi fossero in numero finito.

sistemi generatori $N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n)}$. Dico intanto che si possono adottare tali convenzioni da rendere questo sistema di tipo A.

Ammettiamo per un momento di aver dimostrata la cosa per i sistemi d'ordine $n-1$ ed in particolare per $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n-1)}\}$, intendendo sempre $N^{(n)} > N^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots n-1)$.

Se al sistema $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n-1)}\}$ si applica la costruzione del § 2, assumendo come indici gli elementi di $N^{(n)}$, si trova, come sappiamo, un nuovo sistema di tipo (¹) A. Esso differisce da $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n-1)}, N^{(n)}\}$ soltanto nella notazione, talchè basta convenire che in $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n)}\}$ le regole ordinative e operative sono le stesse, per aver mezzo di estendere la proprietà enunciata ai sistemi d'ordine n, quando essa vale per quelli d'ordine $n-1$. Risalendo da $n-1$ a $n-2$, da $n-2$ a $n-3$, ecc., si è ricondotti ai sistemi di prim'ordine; e per questi risponde il § 2.

Ogni sistema $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n)}\}$ è dunque di tipo A. Bisogna tuttavia accertare, affinchè riesca appieno giustificato il procedimento, che i monosemii a_ν $(\nu = \nu^{1)} + \nu^{2)} + \dots + \nu^{n)})$ si comportano effettivamente come si è stabilito in principio di questo paragrafo, seguono cioè le stesse regole, valide pei monosemii, che provengono da un solo sistema di tipo N.

Qui ancora, basta ammettere la cosa per i monosemii di $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n-1)}\}$, che allora la si prova subito per i monosemii di $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n-1)}, N^{(n)}\}$.

Sieno $a' = a_{y+\nu^{n)}}$, $b' = b_{z+\mu^{n)}}$ (con a e b elementi di A, $y = \nu^{1)} + \nu^{2)} + \dots + \nu^{n-1)}$, $z = \mu^{1)} + \mu^{2)} + \dots + \mu^{n-1)}$) due monosemii di $\{N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n)}\}$.

Ponendo $\mathfrak{a} = a_y$, $\mathfrak{b} = b_z$, dovremo, secondo il convenuto, considerare i monosemii $\mathfrak{a}_{\nu^{n)}}$, $\mathfrak{b}_{\mu^{n)}}$ e ricavare da essi le norme, che reggono gli elementi corrispondenti a', b'.

Le relazioni di disuguaglianza tra a' e b' dovranno dunque stabilirsi come segue:

1) $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ del medesimo segno e $\nu^{n)} = \mu^{n)}$:

$$a' \gtreqqless b', \text{ secondochè } \mathfrak{a} \gtreqqless \mathfrak{b}$$

2) $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ del medesimo segno e $\nu^{n)} \gtrless \mu^{n)}$:

$$a' \gtrless b', \text{ secondochè } \nu^{n)} \gtrless \mu^{n)}$$

(¹) Infatti la forma generale dei monosemii dei due sistemi è $a_{\nu^{1)}+\nu^{2)}+\dots+\nu^{n-1}\nu^{n)}}$ per l'uno, $(a_{\nu^{1)}+\nu^{2)}+\dots+\nu^{n-1)}})_{\nu^{n)}}$, per l'altro; differiscono dunque soltanto nella notazione quei monosemii, che corrispondono agli stessi elementi $a, \nu^{1)}, \nu^{2)}, \dots, \nu^{n)}$. È manifesto dopo ciò che ogni insieme di monosemii di un sistema, diviene, cambiando solo la notazione, insieme di monosemii dell'altro sistema; in particolare un numero dell'uno si cambia in un numero dell'altro. Conviene aggiungere, per giustificare quest'ultimo asserto, che le condizioni, sotto cui un insieme di monosemii dà luogo ad un numero, sono effettivamente le stesse, in entrambi i casi.

3) $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ entrambi nulli:

$$a' = b' = 0$$

4) $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ di segno opposto e non entrambi nulli; detto $\mathfrak{a}$ quello non negativo:

$$a' > b'.$$

Per essersi ammesso che $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ si comportano come monosemii di caratteristiche a, b e di indici y, z, l'ipotesi — $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ del medesimo o di opposto segno — significa che sono del medesimo o di opposto segno a e b, e le relazioni $\mathfrak{a} \gtreqless \mathfrak{b}$ vanno interpretate in due modi diversi, secondochè $y = z$, ovvero $y \gtrless z$. Nella prima ipotesi (notando che, per la indipendenza dei sistemi generatori, le due eguaglianze $y = z$, $\nu^{n)} = \mu^{n)}$ si possono raccogliere nell'unica $y + \nu^{n)} = z + \mu^{n)}$) si ha da 1):

1$^{\text{bis}}$) a e b del medesimo segno e $y + \nu^{n)} = z + \mu^{n)}$:

$$a' \gtreqless b', \text{ secondochè } a \gtreqless b.$$

Nella seconda ipotesi, la 1) stessa ci dice che, per a e b dello stesso segno e $\nu^{n)} = \mu^{n)}$, è $a' \gtrless b'$, secondochè $y \gtrless z$, o, se si vuole, $y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)}$. Questo caso e quello contemplato da 2) si possono raccogliere nella proposizione:

2$^{\text{bis}}$) a e b del medesimo segno e $y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)}$:

$$a' \gtrless b', \text{ secondochè } y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)}.$$

Infatti, se $\nu^{n)} = \mu^{n)}$, da $y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)}$, segue $y \gtrless z$, e ricadiamo nella seconda parte di 1); se invece $\nu^{n)} \gtrless \mu^{n)}$, per essere y e z infinitesimi rispetto a $\nu^{n)}$ e $\mu^{n)}$, si ha $y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)}$ assieme a $\nu^{n)} \gtrless \mu^{n)}$, e quindi il caso 2).

A 3) e 4) si attribuisce senz'altro la forma equivalente:

3$^{\text{bis}}$) a e b entrambi nulli:

$$a' = b' = 0$$

4$^{\text{bis}}$) a e b di segno opposto e non entrambi nulli; supposto a quello non negativo:

$$a' > b'.$$

Le proposizioni 1$^{\text{bis}}$), 2$^{\text{bis}}$), 3$^{\text{bis}}$), 4$^{\text{bis}}$) esprimono precisamente che i monosemii, desunti da un sistema intero $\boldsymbol{M}$, si comportano, rispetto all'ordine, come quelli, che provengono da un N.

Verifichiamo ancora la regola di moltiplicazione, mostriamo cioè che il prodotto di $a' = a_{y+\nu^{n)}}$ per $b' = b_{z+\mu^{n)}}$ è:

$$a'\, b' = (ab)_{y+z+\nu^{n)}+\mu^{n)}}.$$

Avremo, per definizione, che $a'b'$ è quell' elemento di $\}N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n)}\{$, che corrisponde al prodotto di $\mathfrak{a}_{\nu^{n)}}$ per $\mathfrak{b}_{\mu^{n)}}$. Ora:

$$\mathfrak{a}_{\nu^{n)}}\,\mathfrak{b}_{\mu^{n)}} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_{\nu^{n)}+\mu^{n)}} = (a_y\, b_z)_{\nu^{n)}+\mu^{n)}} = [(ab)_{y+z}]_{\nu^{n)}+\mu^{n)}} ,$$

e al monosemio $[(ab)_{y+z}]_{\nu^{n)}+\mu^{n)}}$ corrisponde precisamente il monosemio $(ab)_{y+z+\nu^{n)}+\mu^{n)}}$ di $\}N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n)}\{$.

Si vede facilmente che m qualunque sistemi generatori $N^{(r_1)}, N^{(r_2)}, \ldots, N^{(r_m)}$ di un $\}N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n)}\{$ determinano un sistema $\}N^{(r_1)}, N^{(r_2)}, \ldots, N^{(r_m)}\{$, contenuto in $\}N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n)}\{$. Ne viene che le relazioni fra due o più a' hanno carattere invariantivo rispetto a tutti i possibili sistemi $\}N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n)}\{$, in cui questi a' si immaginino contenuti.

Ciò permette di risguardare l' insieme di tutti gli a' come un sistema di tipo A.

6. Ad illustrazione del procedimento, testè delineato, prendiamo per sistema A i numeri reali, per sistema M il $V^{(1)}$ del § 4. I sistemi generatori sono del tipo a_ν (dove ν è fisso ed a può assumere tutti i valori interi); fissiamone due: $N^{(1)} = a_\nu$, $N^{(2)} = b_\mu$ $(\mu > \nu)$, e consideriamo il sistema $\}N^{(1)}, N^{(2)}\{$.

Essendo $c^{(ij)}, \gamma^{(ij)}$ numeri reali arbitrarii, e $a_\nu^{(ij)} + b_\mu^{(i)}$, $\alpha_\nu^{(ij)} + \beta_\mu^{(i)}$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ due insiemi iperellittici provenienti dai sistemi $N^{(1)}, N^{(2)}$:

$$a' = \sum_0^\infty{}_{ij}\, (c^{(ij)})_{a_\nu^{(ij)}+b_\mu^{(i)}} ,$$

$$b' = \sum_0^\infty{}_{ij}\, (\gamma^{(ij)})_{\alpha_\nu^{(ij)}+\beta_\mu^{(i)}}$$

rappresenteranno (¹) due generici numeri del sistema $\}N^{(1)}, N^{(2)}\{$.

Come si confronteranno tra loro? Dovremo ricorrere agli aggregati:

$$\sum_0^\infty{}_j\, (c^{(ij)})_{a_\nu^{(ij)}+b_\mu^{(i)}} ,$$

$$\sum_0^\infty{}_j\, (\gamma^{(ij)})_{\alpha_\nu^{(ij)}+\beta_\mu^{(i)}} ,$$

che corrispondono ad un medesimo valore di i, risguardandoli in sostanza come monosemii, i cui indici sieno rispettivamente $b_\mu^{(i)}, \beta_\mu^{(i)}$ e le caratteristiche i numeri di $\}N^{(1)}\{$:

$$\mathfrak{a}^{(i)} = \sum_0^\infty{}_j\, (c^{(ij)})_{a_\nu^{(ij)}} ,$$

$$\mathfrak{b}^{(i)} = \sum_0^\infty{}_j\, (\gamma^{(ij)})_{\alpha_\nu^{(ij)}} .$$

(¹) Si avverta che il simbolo sommatorio serve soltanto a rappresentare in modo comodo l' aggregato dei monosemii, che costituiscono un numero. Esso acquista effettivo significato di *somma*, solo quando i monosemii stessi sieno in numero finito; *formalmente però si comporta come una somma.* Ciò risulta dai §§ 2 e 5.

Si incomincierà col fare $i = 0$, poi 1, poi 2, ecc.; o le due successioni $\mathfrak{a}^{(i)}_{b^{(i)}_\mu}$, $\mathfrak{b}^{(i)}_{\beta^{(i)}_\mu}$ riusciranno identiche e allora $a' = b'$, o vi sarà una prima coppia $\mathfrak{a}^{(i)}_{b^{(i)}_\mu}$, $\mathfrak{b}^{(i)}_{\beta^{(i)}_\mu}$ di elementi diversi, e allora $a' \gtrless b'$, secondochè $\mathfrak{a}^{(i)}_{b^{(i)}_\mu} \gtrless \mathfrak{b}^{(i)}_{\beta^{(i)}_\mu}$.

Come esempio di operazione, calcoliamo il quoziente di $a' = 1$ per $b' = 1_1 - u_0 - v_{1-1_1}$ (u e v essendo quantità reali arbitrarie). I sistemi generatori $N^{(1)}$, $N^{(2)}$ sono i monosemii di indice 0 ed 1. Per eseguire la divisione, bisogna porre:

$$\mathfrak{a} = 1_0\,,\ \mathfrak{b} = 1_1 - u_0\,,\ \mathfrak{c} = v_1\,;$$
$$a' = \mathfrak{a}_0\,.\ b' = \mathfrak{b}_0 - \mathfrak{c}_{-1_1}$$

ed operare su questi colle solite regole (§ 2). Ciò dà:

$$\frac{a'}{b'} = \sum_0^\infty{}_i \left(\frac{\mathfrak{c}^i}{\mathfrak{b}^{i+1}}\right)_{-i_1}.$$

Essendo $\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{b}$ numeri di $\}N^{(1)}\{$, va applicato analogo criterio per il calcolo di un generico termine $\frac{\mathfrak{c}^i}{\mathfrak{b}^{i+1}} = v^i_i \frac{1}{(1_1 - u_0)^{i+1}}$.

Ora si ha:

$$\frac{1}{(1_1 - u_0)^{i+1}} = 1_{-(i+1)} \sum_i^\infty{}_j \binom{i}{j} u^{i-j}_{-(j-i)}\,,$$

quindi:

$$\frac{\mathfrak{c}^i}{\mathfrak{b}^{i+1}} = 1_{-1}\, v^i \sum_i^\infty{}_j \binom{i}{j} u^{j-i}_{-(j-i)}\,.$$

Se si porta questo valore nella espressione precedente di $\frac{a'}{b'}$, e si ripassa al sistema $\}N^{(1)}, N^{(2)}\{$, lasciando in evidenza il fattore 1_{-1}, si trova in definitiva:

$$\frac{a'}{b'} = 1_{-1} \sum_0^\infty{}_i \sum_i^\infty{}_j \left\{\binom{j}{i} u^{j-i}\, v^i\right\}_{-(j-i)-i_1}.$$

7. Riprendiamo il sistema $V^{(1)}$ e combiniamolo col sistema A dei numeri reali, secondo le norme del § 5. Ne otterremo un $A^{(1)}$ e da esso potremo cavare un $V^{(2)}$, che comprende tutti e soli quegli a', per cui:

1°. L' insieme iperellittico corrispondente consta di un numero *finito* di elementi *positivi* $y = \nu^{n)p_n} + \nu^{n-1)p_n p_{n-1}} + \cdots + \nu^{1)p_n p_{n-1}\cdots p_1}$ (talchè gli apici p_i variano da 0 a un limite superiore determinato s_i, e, in ogni y, la prima delle ν, che non è nulla, è positiva).

2°. Le caratteristiche dei relativi monosemii a_y sono intere.

Tale $V^{(2)}$ (che comprenda in sè il primitivo $V^{(1)}$) è a sua volta un sistema M intero, da cui, assumendo sempre come A i numeri reali, si può dedurre un $A^{(2)}$. Le stesse limitazioni, con cui da $A^{(1)}$ si passa a $V^{(2)}$, danno ora un $V^{(3)}$ e così di seguito [1].

Si può pensare l'insieme V di tutte le $V^{(i)}$ ($i=1, 2, ...$) (o, ciò che è lo stesso, in quanto ciascuna $V^{(i)}$ comprende quelle, che la precedono, l'insieme limite di $V^{(i)}$ per $i=\infty$); anche questo è un sistema intero. Infatti ogni elemento deve, per definizione, appartenere a qualche $V^{(i)}$ e, come tale, risultare da un numero finito di sistemi generatori.

La classe (II) *dei numeri interi del prof. Veronese equivale a* V.

A questo punto si è facilmente tratti a ritenere che, applicando ai numeri reali la costruzione del § 5, con V per sistema intero M, risulti un A′, che rappresenti completamente il continuo rettilineo di Veronese. Se ne è in realtà molto vicini, ma bisogna ancora una volta ampliare il sistema A′, introducendo nuovi elementi.

Giova frattanto rilevare che lo stesto A′ rispecchia una forma ad una dimensione, per cui valgono le ipotesi I-VII [2] di Veronese, ma non l'VIII [3].

8. Per abbracciare anche quest'ultima, si procede nel modo seguente.

Un numero di A′ si dice *appartenente al sistema* $N^{(i)}$, se $N^{(i)}$ è il più elevato dei suoi sistemi generatori, e se di più, negli indici dei singoli monosemii, l'addendo $\nu^{(i)}$ è negativo (non nullo). In tale condizione, gli indici stessi sono negativi e il numero si presenta come un infinitesimo, il cui ordine è in certa guisa misurato dal detto sistema generatore $N^{(i)}$.

Ciò posto, si consideri una successione $a'^{(1)}, a'^{(2)}, a'^{(3)}, ...$ di elementi di A′, e si supponga che, scelto ad arbitrio un elemento ω in V, la differenza $a'^{(h)} - a'^{(k)}$ ($h, k < n$) *appartenga, da un certo n in avanti, a degli* $N^{(hk)} > \omega$. Diremo che la differenza $a'^{(h)} - a'^{(k)}$ diventa *indefinitamente piccola in senso assoluto* e chiameremo *convergente* una successione [4], i cui elementi godono di questa proprietà.

Ad ognuna di esse potrà farsi corrispondere un nuovo elemento l [5].

[1] Secondo la notazione di Veronese, sarebbe il sistema, che si ottiene dal simbolo Z, supponendovi μ infinito d'ordine finito (cfr. « Fondamenti, ecc. », pag. 107; si badi che Z consta in ogni caso di un numero *finito* di addendi). Dallo stesso simbolo Z, usufruendo i numeri di $V^{(2)}$, si han quelli di $V^{(3)}$, ecc.

[2] Cfr. pag. 67, 84, 92, 106, 128, 147.

[3] Pag. 150.

[4] Sarebbe per es. convergente (usando la nomenclatura di Veronese) la successione:

$$1, 1+\frac{1}{\infty_1}, 1+\frac{1}{\infty_1}+\frac{1}{\infty_1\infty_1}, 1+\frac{1}{\infty_1}+\frac{1}{\infty_1\infty_1}+\frac{1}{\infty_1\infty_1\infty_1}, \dots .$$

[5] Questa convenzione sostituisce l'ipotesi VIII di Veronese. Volendo mantenere l'analogia, anche nella forma, si potrebbe sostituire alla successione $a'^{(1)}, a'^{(2)}, ...$ una coppia di classi contigue (in senso assoluto).

Si converrà che l sia eguale ad un a' allora e solo allora che, nella corrispondente successione, gli elementi, a partire da un certo, sono eguali a questo a'.

Nulla di più facile che estendere al complesso degli a' e degli l le relazioni di disuguaglianza e le operazioni aritmetiche in modo da costituirne un sistema A'' di tipo A.

Basta riportarsi a quanto si fa nell'algebra elementare per i numeri irrazionali, con questo vantaggio che la convergenza in senso assoluto delle nostre successioni permette di procedere in modo assai più semplice e spedito, senza neanche rendere necessario, o almeno opportuno (come avviene nel campo ordinario) di sostituire ad un'unica successione due classi contigue, ovvero una ripartizione di Dedekind.

Il sistema A'' fa perfetto riscontro alla forma fondamentale del prof. Veronese. Per questo, valgono tutte le ordinarie regole di calcolo; conservano dunque per quella la loro validità tutte le ordinarie costruzioni geometriche. In particolare la geometria proiettiva, come già ebbe a notare il prof. Veronese.

Petrografia. — *Di alcune rocce filoniane della valle di Scalve.* Nota del dott. Giuseppe Vigo, presentata dal Socio Struever.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meteorologia. — *Sulla variazione annua della temperatura nel clima di Roma* (1). Nota I. del dott. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio Tacchini.

Quando, per una serie abbastanza estesa di anni di osservazione, si ponga mente al succedersi delle temperature di un determinato mese, o di una determinata stagione, non solo si trovano notevoli differenze fra le temperature corrispondenti in due anni diversi, ma si hanno, in generale, per parecchi anni consecutivi, differenze nello stesso senso dalla temperatura che, per quel determinato mese o per quella stagione considerata, risulterebbe come media aritmetica di tutte le temperature osservate nella serie.

Lo stesso fatto si osserva quando si consideri il succedersi delle medie temperature annue, ed in conseguenza di questo, alcuni scienziati furono indotti a ricercare un periodo per il succedersi delle annate calde o fredde; cioè con temperature medie sensibilmente superiori od inferiori alla normale.

(1) Lavoro eseguito nell'Ufficio Centrale di Meteorologia.

Il *W. Koppen*, per esempio, credette di aver trovato un periodo di 11 anni (1), il periodo invece, sarebbe di 19 anni, secondo *C. R. Russel* (2), ed il *Brückner* (3) discutendo le osservazioni fatte dal 1700 in varie parti del globo, ne deduce che si hanno delle fluttuazioni nella temperatura dell' aria che si estendono a tutta la Terra, e sono soggette ad un periodo di 35 anni. Giova notare che quest' ultimo risultamento pare confermato da uno studio recente del *Maurer* (4) sulla variazione secolare della temperatura estiva.

Un altro fatto, quello cioè che tali scostamenti avvengono contemporaneamente nello stesso senso, se non con la stessa intensità, in paesi assai lontani fra loro, era già stato osservato anche dal padre *Secchi* (5) che nel discutere i risultati delle osservazioni fatte al Collegio Romano dal 1843 al 1850, osservò che le variazioni annue della temperatura sono nel medesimo senso contemporaneamente a Roma, a Parigi, a Makerstoun in Scozia, a Greenwich ed a Vienna.

La seguente tabella pone in evidenza il fatto che anche in questi ultimi tempi gli scostamenti della temperatura annua di Roma sono sensibilmente concordi con la media degli scostamenti di 7 altre stazioni della Europa centrale, e ci dà ancora il valore di tali scostamenti per tutte ed otto le stazioni dal 1881 al 1894. Per gli anni dal 1876 al 1881, si avrà una idea del senso e della intensità degli scostamenti esaminando l' unito diagramma che segna l' andamento medio della temperatura annua in Europa, ed è tolto dal citato lavoro del Brückner.

In conseguenza del fatto che gli scostamenti conservano per parecchi anni di seguito il medesimo segno, ne viene che, per giungere ad una conoscenza sufficientemente esatta della *media normale di temperatura*, cioè di quella parte di temperatura media che rimane costante ogni anno, occorre una lunga serie di anni di osservazioni.

Il fatto poi che il senso degli scostamenti è quasi sempre concorde per tutte le stazioni della Europa centrale, ci dà il mezzo di conoscere i periodi freddi ed i caldi di un dato luogo anche prima di averne calcolata la normale, così che, per aver questa con soddisfacente approssimazione, si dovrà por mente non solo al numero totale degli anni di cui si vuol prendere la media, ma anche al numero presumibile di anni troppo freddi o troppo caldi che nella serie considerata verranno a trovarsi.

Per queste ragioni non tutte le serie composte di un egual numero di anni sono egualmente favorevoli, e non è nemmeno detto che aumentando

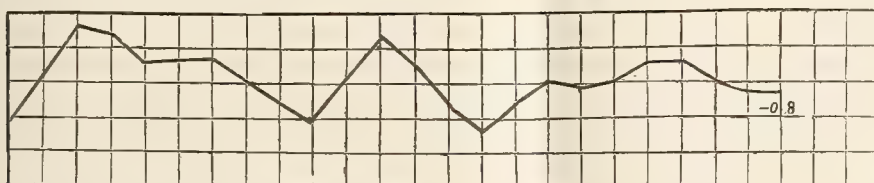
(1) Zeitschr. für. Met. Bd. VIII, pag. 241, 257; Bd. XV, pag. 279; Bd. XVI, pag. 140, 183.

(2) Geogr. Abhandl. Bd. IV, H, 2, Wien 1890.

(3) Nature, vol. 54, (1896), pag. 379.

(4) Met. Zeitschrift. Bd. XIV, (1897), pag. 263.

(5) Memorie dell' Osservatorio del Collegio Romano, anno 1850.

Anno	Basilea	Ginevra	Zurigo	Monaco	Stuttgart	Berlino	Parigi	Media	Roma
1881	0,1	0,1	0,0	— 0,5	— 0,2	— 0,7	— 0,1	— 0,2	0,4
82	0,4	— 0,1	0,3	— 0,1	0,2	0,6	0,2	0,2	0,3
83	0,1	— 0,3	— 0,3	— 0,4	— 0,2	0,0	0,0	— 0,2	— 0,3
84	0,7	0,5	0,4	0,4	0,4	0,5	0,6	0,5	— 0,6
85	0,1	0,3	0,0	0,0	— 0,3	— 0,4	— 0,1	— 0,1	0,5
86	0,2	0.4	0,0	0,2	0,1	— 0,3	0,4	0,1	0,2
1887	— 0,1	— 0,9	— 1,3	— 1,2	— 1,3	— 0,7	— 1,1	— 1,2	— 0,03
88	— 0,9	— 0,8	— 1,0	— 0,9	— 1,2	— 1,0	— 1,0	— 1,0	— 0,2
89	— 0,7	— 0,8	— 0,9	— 0,8	— 0,8	— 0,0	— 0,4	— 0,6	— 0,2
90	— 0,8	— 0,9	— 1,2	— 0,9	— 0,9	— 0,0	— 0,6	— 0.8	— 0,5
91	— 0,6	— 0,6	— 0,8	— 0,7	— 0,8	— 0,1	— 0,4	— 0,6	— 0,4
1892	0,2	0,2	0,3	0,0	— 0,2	— 0,3	0,2	0,1	0,8
93	0,6	0,8	0,5	0,0	0,3	— 0,1	0,9	0,4	0,4
94	0,2	0,3	0,2	0,0	0,1	0,3	0,5	0,2	0,3

di qualche anno una serie già considerata si consegua una maggior esattezza nei risultati, potendosi anche raggiungere l' effetto opposto se gli anni aggiunti per essere tutti, o quasi tutti troppo freddi, o troppo caldi, generano uno spostamento anormale nelle medie, o fanno aumentare lo spostamento già esistente.

Così se noi consideriamo le medie fino ad ora calcolate per il clima di Roma, troviamo che quelle del Secchi si scostano dalle normali, più di quello che dovremmo aspettarci dal numero di anni osservati, perchè questi appartengono quasi tutti ad un periodo freddo.

Quelle ottenute dal Tacchini con la serie di 25 anni (1855-79) [1] hanno presso a poco lo stesso grado di esattezza di quelle calcolate dal Cancani per la serie (1855-89) perchè, nell' una e nell' altra serie, sono in egual proporzione gli anni caldi ed i freddi.

[1] *Sul clima di Roma.* Annali della Meteorologia, anno 1882, parte III.

Nel quadro seguente pongo a riscontro i risultati ottenuti dal Tacchini e dal Cancani con quelli che ho ora ottenuti dalla serie 1855-94 dove sono esattamente tanti anni freddi che caldi.

	(1855-79)	(1855-89)	(1855-94)
Decembre . . .	7,54	7,61	7,63
Gennaio	6,89	6,79	6,74
Febbraio . . .	8,28	8,29	8,23
Marzo	10,33	10,41	10,38
Aprile	13,78	13,73	13,74
Maggio	17,75	17,78	17,79
Giugno	21,73	21,58	21,56
Luglio	24,50	24,60	24,60
Agosto	24,19	24,19	24,22
Settembre . . .	21,19	21,07	21,08
Ottobre	16,56	16,41	16.48
Novembre . . .	11,04	11,21	11,32
Anno	13,32	13,31	13,33

È da notarsi il fatto che la media annua da me calcolata è più vicina a quella trovata dal Tacchini che non a quella trovata dal Cancani, e che le differenze fra i numeri della prima colonna e quelli della seconda hanno quasi sempre segni opposti a quelli fra la seconda e la terza e che tutte hanno valori assoluti assai piccoli, ciò che ci induce a ritener poco probabile uno spostamento costante delle temperature medie in un senso determinato ed è d' altra parte una prova della attendibilità delle medie calcolate.

Mi propongo ora di cercare, con quella esattezza che comporta il metodo dei minimi quadrati, gli scostamenti probabili da queste medie, e la probabile frequenza di scostamenti superiori a limiti determinati. Cercherò poi gli errori probabili delle medie ora calcolate, e risolverò, per le medie temperature decadiche, i medesimi quesiti che ora ho enunciato per quelle dei mesi, delle stagioni e dell' anno.

Nell' ultima parte di questo studio, prenderò in esame le successioni delle temperature che una stessa stagione ha nei diversi anni, o che le diverse stagioni hanno in uno stesso anno, per vedere quale dipendenza vi sia fra il carattere termico di una determinata stagione e quello delle stagioni consecutive.

I.

Ora è necessario, anzitutto, stabilire con esattezza i limiti in cui sono comprese le varie stagioni. Molti fanno corrispondere le stagioni ai successivi trimestri dell' anno meteorologico: ma questa ripartizione non risponde

al concetto che ordinariamente si ha di stagione, secondo il quale dovrebbero essere insieme aggruppati i mesi in cui la temperatura è notevolmente superiore alla media annua, quelli in cui è notevolmente inferiore e quelli in cui si hanno temperature poco lontane dalla media dell' anno.

Il settembre, per esempio, nei nostri climi dovrebbe considerarsi come mese di estate, come già hanno fatto in Germania vari autori, fra i quali anche ultimamente il Maurer nel lavoro citato.

Mi pare poi che la ripartizione in stagioni non dovrebbe esser fatta in modo unico per tutti i climi, ma dovrebbe dipendere dagli scostamenti che, in un clima determinato, hanno le temperature normali mensili da quella annua.

Così per fare tale ripartizione in modo razionale si dovrebbe incominciare a calcolare la media aritmetica degli scostamenti presi in valore assoluto che nell' anno normale le medie mensili hanno dalla annua.

Questa media sarebbe da chiamarsi secondo il Dove, *mutabilità media delle temperature mensili nell' anno normale.*

Calcolato questo numero, si assegneranno all' inverno ed all' estate quei mesi le cui temperature hanno dalla media annua scostamenti maggiori di quel numero, ed alle altre stagioni i rimanenti.

Per Roma essendo la mutabilità media della temperatura mensile, ora definita, di 5°64, le stagioni risulteranno così composte:

Mesi		Scostamenti	Mesi		Scostamenti
Inverno	Decembre	— 7,74	Estate	Giugno	+ 6,23
	Gennaio	— 8,59		Luglio	+ 9,27
	Febbraio	— 7,10		Agosto	+ 8,89
Primavera	Marzo	— 4,95		Settembre	+ 5,75
	Aprile	— 1,59	Autunno	Ottobre	+ 1,15
	Maggio	+ 2,46		Novembre	— 4,01

II.

Ho calcolato le temperature medie di ogni stagione in ciascuno dei 40 anni della serie, e ne ho desunto le temperature normali che risultano di 7°,50 per l' inverno, di 13°,97 per la primavera, di 22°,89 per l' estate, di 13°,94 per l' autunno.

Nel seguente prospetto si trovano registrate le deviazioni delle temperature, che si sono avute in ciascuno dei 40 anni, dalla normale.

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Anno
1855	— 0,04	— 0,20	— 0,40	+ 1,75	+ 0,07
56	+ 0,56	— 0,90	— 0,56	— 1,47	— 0,53
57	— 0,71	— 0,34	— 0,57	— 0,34	— 0,53
58	— 1,97	— 0,01	— 0,35	— 0,04	— 0,63
59	— 0,67	+ 0,23	— 0,13	+ 1,26	+ 0,07
1860	— 0,80	— 0,24	— 0,50	— 0,49	— 0,53
61	+ 1,61	— 0,63	+ 0,14	+ 0,89	+ 0,47
62	— 0,44	+ 0,93	— 0,39	+ 1,15	+ 0,17
63	— 0,02	+ 0,63	+ 0,19	+ 0,95	+ 0,37
64	— 0,87	+ 0,18	— 0,28	— 0,12	— 0,33
65	— 0,05	+ 0,33	+ 0,99	+ 0,55	+ 0,47
66	+ 0,58	+ 0,30	— 0,07	— 0,60	+ 0,07
67	+ 1,05	+ 1,40	+ 0,45	— 2,10	+ 0,37
68	— 0,89	+ 0,24	+ 0,03	— 0,03	— 0,13
69	+ 0,82	+ 0,03	— 0,11	— 1,00	— 0,03
1870	+ 0,24	+ 0,04	— 0,19	+ 0,33	+ 0,07
71	+ 0,02	— 0,27	— 0,28	— 0,56	— 0,23
72	— 0,38	+ 0,73	— 0,21	+ 0,51	+ 0,07
73	+ 1,57	+ 0,31	+ 0,65	+ 0,56	+ 0,77
74	— 0,97	— 1,72	+ 0,42	— 0,83	— 0,63
75	— 0,08	— 0,52	+ 0,18	— 0,70	— 0,23
76	+ 0,15	+ 0,39	— 0,52	— 0,28	— 0,13
77	+ 1,66	— 0,54	+ 0,96	— 1,02	+ 0,37
78	— 0,48	+ 0,36	+ 0,33	+ 1,01	+ 0,27
79	+ 1,41	— 1,04	+ 0,28	— 1,29	— 0,03
1880	— 2,00	+ 0,16	+ 0,04	+ 1,64	— 0,23
81	+ 1,57	+ 0,45	+ 0,10	— 0,76	+ 0,37
82	— 0,02	+ 1,01	— 0,14	+ 0,91	+ 0,27
83	+ 1,40	— 1,34	— 0,71	— 0,36	— 0,33
84	— 0,03	+ 0,90	— 1,07	— 3,00	— 0,63
85	+ 0,46	+ 0,10	+ 0,62	+ 0,63	+ 0,47
86	+ 0,25	— 0,51	— 0,05	+ 1,31	+ 0,17
87	— 0,31	— 0,33	+ 0,79	— 0,77	— 0,03
88	— 0,61	+ 0,07	+ 0,14	— 0,91	— 0,23
89	— 0,48	— 0,13	+ 0,01	— 0,08	— 0,23
1890	— 0,37	— 0,30	— 0,76	— 0,96	— 0,49
91	— 1,48	— 0,30	— 0,29	+ 0,75	— 0,39
92	+ 1,11	+ 0,19	+ 0,48	+ 1,06	+ 0,94
93	— 0,93	+ 0,36	+ 0,63	+ 1,50	+ 0,34
94	+ 0,13	+ 0,06	+ 0,21	+ 1,00	+ 0,56

Dall' esame di questo prospetto appare a prima vista che il carattere della successione delle deviazioni, per ogni determinata stagione, e per la media dell' anno, non è l' alternativa di valori con segni contrari, ma la permanenza, per periodi più o meno lunghi, di deviazioni tutte, o quasi tutte, nello stesso senso.

Un altro fatto che risulta manifestamente è che, anche negli anni con temperature medie sensibilmente lontane dalla normale, non tutte le stagioni hanno scostamenti nello stesso senso cosicchè, mentre le deviazioni annue concordano, nel senso, 36 volte su 40 con quelle delle medie autunnali, questa concordanza si trova verificata solo 24 volte con l' estate, 29 volte con la primavera e 25 volte con l' inverno, e si hanno 8 anni soli, in tutta la serie, in cui concordano nel segno gli scostamenti di tutte le stagioni.

III.

Sono spesso usate le frasi: « Inverno eccezionalmente rigoroso, o mite », « Estate eccessivamente caldo, o fresco » ed altre simili, senza che a queste frasi sia attribuito significato concreto e ben determinato.

Ho creduto di poter togliere questa indeterminazione facendo ricorso alla teoria dei minimi quadrati.

Ho supposto cioè che la probabilità di uno scostamento inferiore in valore assoluto ad un numero assegnato a sia espressa dal valore corrispondente dell' integrale:

$$\theta(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-t^2}\, dt,$$

con

$$t = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot m}$$

e dove m è lo *scostamento medio*, cioè la radice quadrata della media aritmetica dei quadrati di tutti gli scostamenti osservati.

Di poi ho calcolati i valori di quegli scostamenti dalle normali che hanno per probabilità $\frac{1}{2}$, e sono solitamente chiamati: *errori probabili*, e per valori superiori all' errore probabile ho calcolato di mezzo grado in mezzo grado la probabilità di scostamenti superiori a limiti determinati, e quindi anche la probabile frequenza di tali scostamenti.

Potranno allora chiamarsi straordinarie solo quelle temperature che differiscono dalla normale per più dell' errore probabile, e per tali temperature potremo anche dire il numero più probabile di volte in cui si presenteranno per ogni periodo di tempo determinato.

I risultati ottenuti sono raccolti nel quadro seguente, dove ho anche registrato la *mutabilità media* (1) e lo scostamento medio, per ogni mese, per ogni stagione e per la media dell' anno.

I valori delle probabilità calcolate sono espressi in centesimi, così dànno ancora il numero più probabile di volte in cui, per ogni secolo, si avrannno gli scostamenti a cui si riferiscono.

(1) Questo nome fu proposto dal Dove per indicare la media aritmetica dei valori assoluti degli scostamenti osservati.

	Mutabilità media	Scostamento medio	Errore probabile	Probabilità (in centesimi) di scostamenti superiori a							
				0°,5	1°	1°,5	2°	2°,0	3°	3°,5	4°
Decembre . . .	1,23	1,54	1,04		51	33	19	11	5	2	1
Gennaio	1,30	1,63	1,10		55	36	22	12	7	4	1
Febbraio	1,17	1,46	0,99		50	31	17	9	4	2	1
Inverno	0,73	0,92	0,62	58	27	10	3	1	0	—	—
Marzo	1,01	1,27	0,86		43	24	12	5	2	1	0
Aprile	0,67	0,84	0,57		24	8	2	0	—	—	—
Maggio	1,00	1,26	0,85		43	24	11	5	2	0	0
Primavera . . .	0,47	0,59	0,39	39	9	1	0	—	—	—	—
Giugno	0,82	1,03	0,70		33	15	5	2	0	—	—
Luglio	0,70	0,88	0,59		25	9	2	0	—	—	—
Agosto	0,74	0,93	0,62		28	10	3	1	0	—	—
Settembre . . .	0,78	0,98	0,66		31	12	4	1	0	—	—
Estate	0,38	0,47	0,32	29	4	0	—	—	—	—	—
Ottobre	1,15	1,44	0,97		49	30	16	8	4	1	0
Novembre . . .	1,09	1,36	0,92		46	27	14	7	3	1	0
Autunno	0,89	1,11	0,75	—	37	17	7	2	1	—	—
Anno	0,32	0,41	0,27	22	1	0	—	—	—	—	—

I minimi valori della mutabilità media per le temperature mensili, si hanno in aprile ed in luglio, ed i massimi (quasi due volte tanto) sono in gennaio. Si hanno di più due massimi relativi nel maggio e nell' ottobre.

Questi risultamenti sono abbastanza concordi con quelli ottenuti dal Grühn in un suo studio recente intitolato: *Die Temperaturverhältnisse Schleswig-Holsteins und Dänemarks* (Jahresber. d. Gymm zu Meldorf 1897).

Fisica terrestre. — *Velocità di propagazione del terremoto di Pergamo (Asia M.) della notte 13-14 novembre 1895.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

Chimica. — *Soluzioni solide fra composti a catena aperta.* Nota di Giuseppe Bruni, presentata dal Socio Giacomo Ciamician.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Zoologia. — *La fecondazione in una specie animale fornita di spermatozoi immobili* [1]. Nota preliminare del dott. F. Silvestri, presentata dal Socio Grassi.

In varie classi d'animali si conoscono specie, che hanno gli spermatozoi immobili.

Come avviene in questi casi la fecondazione? La biologia, che pure in questi ultimi tempi si è arricchita di tante scoperte sui processi della fecondazione, mancava intorno ad un punto così interessante di una ricerca qualsiasi. Si supponeva soltanto che tali spermatozoi penetrassero nell'uovo passivamente o diventando mobili. Come ognuno capisce, erano queste le due sole ipotesi possibili, ma nessuna osservazione autorizzava ad accettarne una piuttosto che un'altra.

Studiando quei Diplopodi, che hanno lo spermatozoo immobile, ero stato sorpreso dal vedere degli spermatozoi così fatti, che mi sembrava difficile ammettere che potessero ad un dato momento diventare mobili; d'altra parte il poter dimostrare la loro penetrazione passiva mi si presentava come un fatto così interessante, che mi decisi di affrontare le mille difficoltà di un tale studio.

Scelsi a tal uopo una specie di Julide, che mi si prestava relativamente bene: il *Pachyiulus communis* (Savi).

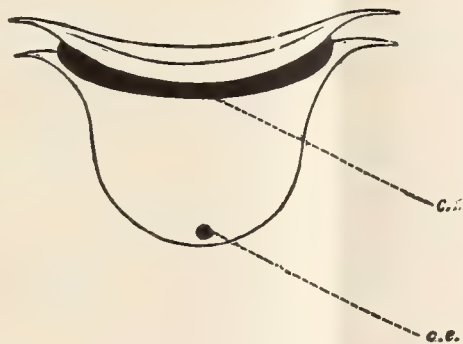



Fig. 1.

In questa specie gli spermatozoi maturi (fig. 1) si presentano circondati da una capsula a forma di cappello con i cromosomi fusi insieme in un cerchio nella parte allargata (fig. 1, *cr*) ed il centrosoma disposto al vertice (fig. 1, *ce*).

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio d'anatomia comparata dell'Università di Roma.

Il primo atto, che compie il maschio, si è quello di far passare gli spermatozoi dai deferenti, che sboccano avanti al secondo paio di piedi per mezzo di un doppio *pene*, nel proprio *organo copulativo*, che trovasi al settimo segmento. Quivi sono ricevuti da una speciale coppa, da cui nell' atto dell' accoppiamento con la femmina vengono riversati in due ricettacoli, che si trovano presso ciascuna apertura vulvale.

Nella maggior parte degli individui l' accoppiamento accade dal novembre al gennaio, e la deposizione delle uova ha luogo sempre da 20-30 giorni dopo l' accoppiamento. Questo fatto aveva anzi indotto alcuni a sospettare che gli spermatozoi frattanto cambiassero di forma e divenissero mobili, tanto più che sono conservati in ricettacoli, limitati internamente da uno strato di cellule ghiandolari (1).

Gli spermatozoi invece non cambiano quivi affatto di forma, nè diventano mobili come ho potuto assodare in modo assoluto, esaminandone molti raccolti nelle vulve di femmine, che avevano appena deposto le uova. Allora, come giungono essi a fecondare le uova, che, come è noto, sono corazzate da un grosso chorion, e che non hanno che un piccolo micropilo?

Seguiamo lo sviluppo dell' uovo nell' ovario.

Nella vescicola germinativa delle uova giovanissime si distinguono: 1° una membrana; 2° un reticolo acromatico, che con il succo nucleare denominerò per brevità sostanza acromatica; e 3° la cromatina raccolta in due corpi maggiori e due minori, che possiamo denominare corpi nucleinici, o globuli cromatici o anche nucleoli di cromatina; questi si tingono fortemente in nero con il metodo di Heidenhain all' allume ferrico ed ematossilina. Più tardi, rimanendo il resto della vescicola germinativa immutato, non si osserva più che un corpo nucleinico maggiore ed uno minore. In uno stadio successivo la vescicola germinativa si è portata alla periferia dell' uovo e si discerne in essa soltanto un grande corpo nucleinico, che è pieno di vacuoli: sembra derivare dalla fusione dei quattro corpi nucleinici suddetti. Questo corpo nucleinico non tarda a scindersi in cromosomi; contemporaneamente scompare anche la membrana della vescicola germinativa, non rimanendo più una separazione del tutto precisa tra la vescicola ed il protoplasma circostante, che si viene distinguendo. In tutte le uova, anche immediatamente prima della deposizione, i cromosomi si trovano distinti e sono in numero di circa dodici.

Nelle uova deposte da pochi secondi i cromosomi non si presentano più distinti fra di loro, ma invece fusi insieme in un corpo allungato, serpentiforme, che denominerò, tanto per intenderci, *serpentello cromatico* (fig. 2 *s.c.*). Questo è ancora tutto immerso nella vescicola germinativa, che quantunque, come ho detto, non sia più del tutto distinta dal protoplasma, pure si riconosce in una certa porzione, che ha quasi l' aspetto di una coppa limitata in

(1) C. Verhoeff, Arch. f. Naturg. Bd. II, H. 2, p. 156. 1897.

ogni parte da una zona di sostanza acromatica ispessita (fig. 2 *i. c.*) e ripiena di sostanza acromatica non ispessita. Attorno la coppa si nota un' irradiazione di protoplasma.

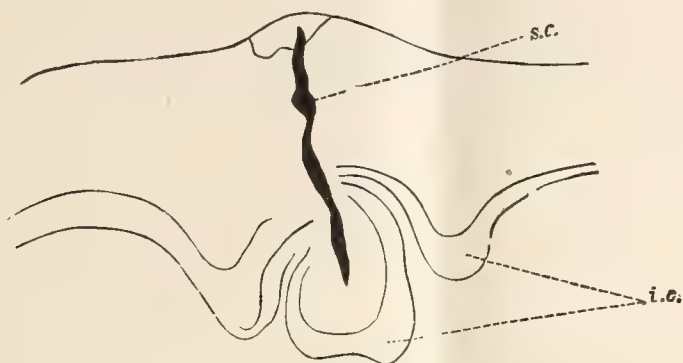



Fig. 2.

Da questo stadio si passa rapidamente ad un altro, in cui l' uovo ha emesso un pseudopodo (fig. 3, *ps*), entro il quale penetra l' estremità del

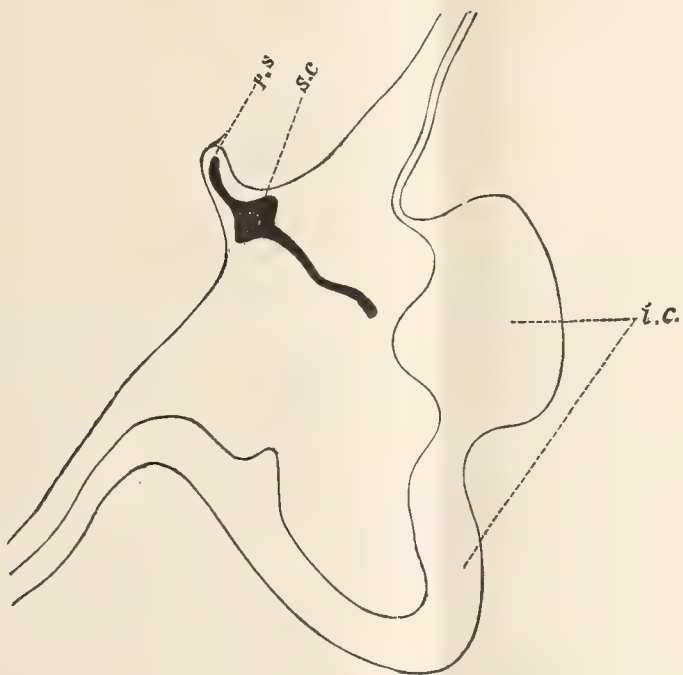



Fig. 3.

serpentello cromatico, che in corrispondenza al punto, da cui sorge il pseudopodo, presenta un allargamento. Osservando opportunamente di fronte l' uovo nel polo animale, si scorge nettamente l' orlo della coppa suddetta ed il pseudopodo, che da essa si eleva. In questo stadio si osserva nella vescicola

germinativa oltre che il serpentello cromatico, un piccolo corpo allungato contenente della cromatina, che probabilmente ha il valore di un corpuscolo polare e che si deve essere separato dal resto dei cromosomi poco prima della deposizione delle uova o durante questa.

Dopo circa mezzo minuto dalla deposizione, in nessun uovo si osserva più il pseudopodo; ed il serpentello cromatico (fig. 4, *s. c.*), che si è

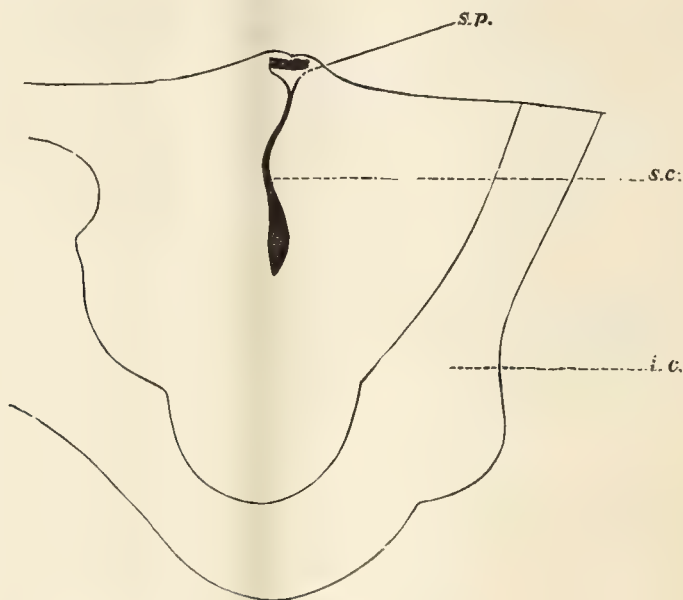



Fig. 4.

ritirato col pseudopodo ed ha perduto l' allargamento, porta all' estremità periferica un corpo a forma di cappello, e che senza indugio possiamo riconoscere per uno spermatozoo: uno spermatozoo nella sua forma genuina, come lo abbiamo trovato nei deferenti, nell' organo copulativo del ♂, nei ricettacoli seminali della ♀.

Con l' esame dei preparati sopra descritti, siamo autorizzati ad ammettere *in modo assoluto* che l' uovo appena dopo la deposizione ha emesso un pseudopodo, formato essenzialmente, se non esclusivamente dalla sostanza acromatica della vescicola germinativa, e con questo pseudopodo accompagnato dal serpentello cromatico, risultante dalla fusione dei cromosomi, ha preso attraverso il micropilo uno spermatozoo e se lo è trascinato dentro.

Questo fenomeno è provato all' evidenza da molte serie di sezioni, fatte con materiale conservato e colorito con differenti metodi.

Il serpentello cromatico continua ad approfondare lo spermatozoo, mentre scompare l' ispessimento a guisa di coppa della sostanza acromatica, che si dispone però ispessita attorno al serpentello stesso. Lo spermatozoo ed il serpentello cromatico non hanno ancora subìto alcun notevole cambiamento. Innanzi allo spermatozoo si nota un' area circolare più trasparente. Questi mutamenti accadono nello spazio di circa quattro ore.

Approfondato lo spermatozoo, il serpentello cromatico compie una rotazione di 90°-180° facendo ruotare insieme lo spermatozoo stesso, che in tale posizione si distacca dal serpentello, e di lì a poco si scinde nei suoi cromosomi. Il serpentello cromatico si accorcia, e poco dopo dello spermatozoo si scinde anch' esso nei suoi cromosomi. Si hanno così costituiti due pronuclei ♂ e ♀ tipici. Frattanto la massa protoplasmatica facendo dei movimenti ameboidi si può approfondare alquanto nel tuorlo, o resta ancora alla periferia. Dopo dieci ore circa dalla deposizione delle uova i due pronuclei (fig. 5) si avvicinano l' un l' altro e danno luogo al primo fuso di segmentazione.

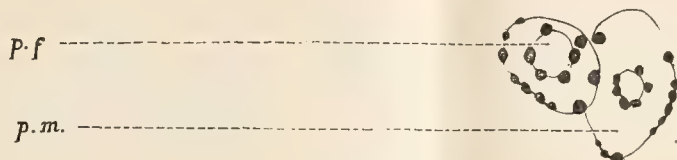



Fig. 5.

Riassumendo brevemente possiamo dire che in questo caso, in cui lo spermatozoo è immobile, è l' uovo e sopratutto la vescicola germinativa che diventa essenzialmente attiva; appena avvenuta la deposizione, i cromosomi si fondono insieme a formare un corpo allungato, che denomino serpentello cromatico, e viene emesso un pseudopodo, con il quale è preso attraverso il micropilo uno spermatozoo, che è trascinato dentro e approfondato dal serpentello cromatico. Questo ruotando fa compiere anche allo spermatozoo una rotazione di 90°-180°. In tale momento si separano, e prima lo spermatozoo poi il serpentello cromatico si scindono nei rispettivi cromosomi, e si formano così due pronuclei ♂ e ♀, che unendosi danno luogo al primo fuso di segmentazione.

Da ultimo voglio far notare: 1° che un lontano riscontro del pseudopodo attivo, quale comparisce in questo caso, si può trovare nel cono di attrazione, che si forma nelle specie a spermatozoo mobile; 2° che nell' uovo a nessuno stadio ho potuto distinguere il centrosoma; 3° che anche nello spermatozoo, dopo che è stato trascinato nell' uovo, non ho potuto più mettere in evidenza il centrosoma con nessun metodo di colorazione.

Su qualche particolare d' interpretazione tornerò dettagliatamente nel lavoro esteso.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tutte le figure sono schematiche.

Fig. 1. Spermatozoo: *cr* cromosomi, *ce* centrosoma.

Fig. 2. Coppa formata essenzialmente se non esclusivamente dalla vescicola germinativa: *ic* ispessimento della coppa, *sc* serpentello cromatico.

Fig. 3. Coppa con il pseudopodo *ps* (le altre lettere come sopra).

Fig. 4. Coppa con il serpentello cromatico *s. c.* che porta uno spermatozoo *sp.*

Fig. 5. Pronucleo maschile *pm,* e promucleo femminile *pf* avvicinati.

Anatomia. — *Sul pancreas dei pesci.* Nota preliminare del dott. G. MASSARI [1], presentata dal Socio B. GRASSI.

I corpi di Langerhans nel pancreas dei pesci sono stati studiati dal Laguesse [2] e dal Diamare [3]. Il Laguesse credette di spiegare la loro presenza nei vertebrati inferiori e in quelli superiori, ammettendo la derivazione dei medesimi dagli alveoli pancreatici per divisione di lavoro. Ogni alveolo dopo aver segregato succo pancreatico per un certo numero di volte, si trasforma temporaneamente, per una sorta di bilancio organico, in corpo di Langerhans e versa nel sangue circolante una secrezione interna. Poi torna a segregare succo pancreatico e poi viceversa, e tale trasformazione si ripete sempre per tutta la vita dell'essere [4].

Il Laguesse notò che tali corpi sono abbastanza rari ma molto voluminosi nel pancreas del *Crenilabrus*, e constano di file di elementi poliedrici e cilindrici riunite in modo da formare dei cordoni pieni, tortuosi e separati tra loro da capillari in abbondanza.

Il Diamare li descrisse nei teleostei (anche nei murenoidi), come formati da un insieme di otricole separate da vasi sanguigni e risultanti da elementi molto piccoli.

« I contorni delle formazioni », egli scrive, « non sono sempre netti; « spesso non è possibile scorgere alcun limite di separazione tra esse e gli « acini del pancreas, sopratutto nelle piccolissime, e dagli acini si differen- « ziano solo per l'aspetto chiaro del loro protoplasma e per lo scarso colo- « rito del nucleo. Le più grosse presentano un contorno, giammai un vero « involucro; qualche volta la presenza di più abbondante connettivo simula « una capsula ».

Rileva poi che tra la capsula e il contenuto si notano spazî più o meno grandi, e quest'ultimo appare spesso molto raggrinzato e con rilevanti alterazioni e disorganizzazioni delle otricole.

Esclusa l'ipotesi che tali processi regressivi sieno dovuti ad una rapida decomposizione post-mortale, avendoli anche riscontrati nei corpuscoli strappati ad animali viventi e rapidamente fissati, il Diamare inclina a credere

(1) Lavoro fatto nel Laboratorio d'anatomia comparata dell'Università di Roma, e presentato come tesi di laurea in medicina nel luglio 1897.

(2) E. Laguesse, *Sur le pancréas du crénilabre.* Revue biol. du Nord de la France, 1895.

(3) V. Diamare, *I corpuscoli surrenali di Stannius e i corpi del cavo addominale dei teleostei.* Bollett. Società dei Naturalisti in Napoli, vol. IX, 1895.

(4) E. Laguesse, *L'histogénie du pancréas.* Journal de l'An. et de la Physiol., 1896.

che i corpi di Langerhans rappresentino una fase regressiva degli acini [1]. In proposito è d'uopo aggiungere la spiegazione data nel 1886 dal Lewaschew, il quale trovò nel pancreas di varî mammiferi (coniglio, gatto, cane) figure che dimostravano un graduale passaggio dalle cellule pancreatiche a quelle dei corpi di Langerhans, e con studî sperimentali volle confermare il fenomeno rilevato alla semplice osservazione microscopica del pancreas in condizioni normali d'attività funzionale. Così mentre nei gatti e nei cani tenuti a digiuno per molto tempo riscontrò scarsissime siffatte modificazioni del tessuto glandolare, in quelli nutriti abbondantemente o pilocarpinizzati a varie riprese, potè osservare molti acini pancreatici modificati totalmente o in parte. Nel primo caso le cellule zimogeniche, mancando lo stimolo alla loro funzione secretoria, mantenevansi in un certo periodo di riposo; nel secondo caso, l'attività cellulare per gli eccitamenti intensi e ripetuti aumentava in modo che la nutrizione dell'elemento stesso restavane danneggiata notevolmente. E non trovando figure cariocinetiche in tali punti della glandola, il Lewaschew suppose che nella maggioranza dei casi le cellule pancreatiche così alterate non andassero distrutte, nè fossero quindi da nuovi elementi sostituite, ma tornassero invece gradatamente a riacquistare il contorno primitivo, il protoplasma granuloso e la maggiore affinità per le materie coloranti: che avesse luogo insomma una sorta di rigenerazione cellulare.

Questo fenomeno, secondo il Lewaschew, si avvera sempre nello stato normale dell'essere, quando per speciali cause temporanee l'attività dell'elemento pancreatico venga eccitata per un certo tempo e intensamente, oppure venga abbassato l'indice di vitalità dell'elemento medesimo. In conclusione i corpi di Langerhans sarebbero porzioni della ghiandola esaurita da una molto attiva secrezione. Dopo un certo periodo di riposo potrebbero riaversi e tornare a funzionare. Aggiungasi che Dogiel si associa alla conclusione di Lewaschew colla sola differenza che non crede possibile la rigenerazione dei corpi di Langerhans [2], Questa rigenerazione negata dal Dogiel viene invece recentemente ammessa col Lewaschew e dal Pischinger [3].

Da parte mia ho studiato i corpi di Langerhans nel pancreas dell'*Anguilla vulgaris* per stabilirne la struttura ed osservarne la derivazione dal tessuto pancreatico e le possibili variazioni di numero, forma e struttura e in rapporto ai diversi stati funzionali del pancreas.

(1) In altro lavoro (*Ricerche intorno all'organo interrenale degli Elasmobranchi — Memorie della Società Italiana delle Scienze* s. III, t. X) egli ripete che sono prodotti di metamorfosi regressiva degli acini pancreatici.

(2) *Archiv für Anat. und Entwick.* 1893.

(3) *Beiträge z. Kenntnis d. Pankreas. Inaug. Diss. München 1885* (non ho potuto consultare il testo originale).

I corpi, o mucchi di Langerhans [1] sono molto numerosi nell'*A. vulgaris*: hanno forma quasi costantemente rotondeggiante e contorni netti e ben distinti.

Mostransi variabilissimi circa le dimensioni. I più piccoli sono composti da un gruppo di pochissime cellule; i più grossi raggiungono il diametro di 2 mm., e possono anche superarlo. Fra questi e quelli v' ha una lunga serie di corpi aventi diametro intermedio e sparsi dappertutto in mezzo al tessuto pancreatico.

Per fissare i pezzettini di glandola che tolsi sempre ad animali vivi, adoperai più di frequente una soluzione di sublimato a mezza concentrazione, e per colorarli mi servii di varie sostanze coloranti (miscela Biondi-Heidenhain, eosina alcoolica e verde metile, safranina, ematossilina) e sopra tutto delle doppie colorazioni (ematossilina e acido picrico, ematossilina ed eosina) ottenendo colorazione differenziata dei corpi di Langerhans e degli alveoli pancreatici.

Nei pezzi ben fissati e trattati poi convenientemente, assai di rado trovansi gli spazî visti dal Diamare tra l'involucro capsulare e le cellule dei mucchi: in ogni caso però la struttura dei corpi appare sempre uniforme. Io suppongo che la presenza di tali spazî debba attribuirsi a un ravvicinamento delle cellule prodotto in massima parte dai reagenti adoperati.

Nei corpi di Langerhans i nuclei degli elementi son colorati tutti ad uno stesso grado d'intensità; ma il protoplasma in alcuni si colora debolmente, in altri quasi niente. Si distinguono perciò delle cellule *a protoplasma poco cromatofilo e delle cellule a protoplasma acromatofilo*. Le cellule poco cromatofile appaiono sui tagli addossate fra loro e allineate in file più o meno lunghe e flessuose, le quali talvolta si ripiegano ad ansa attorno a un capillare sanguigno; le cellule a protoplasma acromatofilo appaiono sparse qua e là tra le file e i vasi, o riunite a gruppi di forma indeterminata. Non esiste disposizione tubolare o alveolare, nè ho mai scorto alterazioni cellulari che possano giustificare l'ipotesi di un processo regressivo.

Fra le cellule acromatofile e ai lati delle file cellulari riferite decorrono numerosi capillari sanguigni, come spiegherò meglio colle figure nel lavoro in esteso.

Dall'osservazione diligente delle cellule degli alveoli pancreatici che stanno attorno ad ogni mucchio di Langerhans, non risulta ch'esse differiscano per qualche piccola particolarità dalle comuni cellule zimogeniche: le notevoli differenze di struttura tra i corpi di Langerhans e gli alveoli pancreatici, fanno credere che si tratti di due tessuti indipendenti fra loro.

Per fondare ulteriormente questa credenza ho esaminato il pancreas di molte anguille:

[1] Adotto il termine *corpi o mucchi di Langerhans*, ammettendo il dubbio che vi siano state comprese dagli autori formazioni differenti delle varie classi di vertebrati.

a) pescate di recente;

b) tenute a digiuno per parecchi mesi in acquario;

c) alimentate abbondantemente con carne per parecchi mesi in acquario;

d) pilocarpinizzate fortemente per un certo tempo (12 giorni).

I risultati di queste ricerche però furono sempre negativi, sicchè non ho potuto convincermi che i mucchi di Langerhans si presentino più numerosi nelle anguille sovralimentate o pilocarpinizzate rispettivamente a quelle tenute a digiuno, e in nessun caso m'è parso di notare alcuna modificazione di forma o struttura nei mucchi stessi.

Infine, mai ho trovato un punto che facesse credere alla possibilità di passaggio graduale di cellule di un alveolo pancreatico in quelle del corpo di Langerhans o viceversa. Non ho mai trovato figure cariocinetiche.

Son venuto quindi alle seguenti conclusioni per l'*Anguilla vulgaris:*

1° *I corpi di Langerhans son numerosi e di grandezza variabile;*

2° *Id. posseggono talvolta un'evidente capsula connettivale, e son costituiti da cellule di due sorta: cioè a protoplasma poco cromatofilo e a protoplasma acromatofilo; le cellule non hanno disposizione tubolare o alveolare, quale riscontrasi in generale nelle ghiandole; esse stanno in rapporto intimo con una rete capillare;*

3° *Id. non rappresentano affatto una fase regressiva degli acini pancreatici;*

4° *Id. non risultano da speciale modificazione delle cellule zimogeniche;*

5° *Id. non mi mostrano finora variazioni di forma e di struttura in rapporto ai diversi stati funzionali del pancreas;*

6° *Id. formano nel loro insieme una glandola tipica a secrezione interna* (*isolotti endocrini*), *mescolata intimamente con gli acini pancreatici* [1].

MEMORIE

DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

L. Fantappiè. *Sui prodotti minerali vulcanici trovati nell' altipiano tufaceo occidentale dei Vulsini, da Farnese a S. Quirico e Pitigliano.* Presentata dal Socio Struever.

[1] Le osservazioni da me fatte sullo sviluppo e sulla metamorfosi dei Murenoidi essenzialmente armonizzano colle conclusioni qui riferite.

B. Grassi.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Paternò, relatore, a nome anche del Socio Cannizzaro, legge una Relazione sulla Memoria dei dottori G. Ampola e C. Ulpiani intitolata: *Sulla Denitrificazione*, proponendo l'inserzione del lavoro negli Atti accademici.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice poste ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dal Corrispondente Mattirolo, e dai signori Ball, De Angelis d'Ossat, De Giovanni, Paladini e Vailati. Fa inoltre particolare menzione del vol. 7° della edizione nazionale sotto gli auspici di S. M. il Re, delle *Opere di Galileo Galilei*, di un nuovo volume delle *Opere scientifiche* di L. Lorenz, e di alcuni volumi di osservazioni astronomiche, inviati dall'Osservatorio del Capo di Buona Speranza.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Sydney; il Museo britannico di Londra; l'Osservatorio Radcliffe di Oxford; il R. Osservatorio di Greenwich; l'Osservatorio meteorologico del Monte Bianco; l'Istituto Smithsoniano di Washington; le Università di Upsala e di Glasgow.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il R. Istituto di studî superiori di Firenze; il Ministero della Marina; la Società zoologica di Londra.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 6 marzo 1898.

Albert I^er de Monaco. — Sur la quatrième Campagne scientifique de la « Princesse Alice ». Paris, 1898. 4°.
Id. — Sur le développement des Tortues. Paris, 1898. 8°.
Id. — Sur les observations météorologiques de l'Océan Atlantique. Paris, 1898. 4°.
Arrigoni degli Oddi E. — La nidificazione del Milvus migrans Boddaert nel territorio veronese. Venezia, 1898. 8°.
Id. — Le recenti comparse del Puffinus Kuhli (Boie) nel Veneziano. Milano, 1898. 8°.
Id. — Nota sopra una varietà di colorito osservato in un'Anas Boscas Linn. Milano, 1898. 8°.
Id. — Notes on some specimens of Anatidæ in the late Count Ninni's, Collection. S. l. 1898. 8°.
Id. — Sopra gli ibridi del tipo Anas Boscas Linn. e Chaulelasmus Straperus (Linn.) colti in Italia. Venezia, 1897. 8°.
Id. — Sopra una Gennaja Feldeggi (Schlegel) colta in Calabria. Siena, 1897. 8°.
Id. — Suchetet. Gli Ibridi naturali fra gli uccelli. Siena, 1897. 8°.
Ball R. — The twelfth and concluding Memoir on the Theory of Screws. Dublin, 1898. 4°.
Battelli A. e *Garbasso A.* — Azione dei raggi catodici sopra i conduttori isolati. Pisa, 1897. 8°.
Battelli A. — Metodi e conquiste della fisica. Pisa, 1898. 8°.
Boccardo E. C. e *Baggi V.* — Trattato elementare completo di Geometria pratica. Torino, 1898. 8°.
Cabreira A. — Sur l'aire des polygones. Lisbonne, 1897. 8°.
Id. — Sur les vitesses. Sur la spirale. Lisbonne, 1898. 8°.
Carnazzi P. — Influenza della pressione sull'indice di rifrazione dei gas. Pisa, 1898. 8°.
De Angelis d'Ossat G. — L'alta valle dell'Aniene P^e. I^a. Studio geologico-geografico. Roma, 1897. 8°.
Id. — Sulla probabile mancanza in Italia dell'Elephas primigenius Blum. Roma, 1898. 8°.
De Giovanni A. — Intorno alla ematuria nevropatica. Padova, 1896. 8°.
Id. — Patologia del simpatico. 2^a ed. Milano, s. a. 8°.
Id. — Studi morfologici sull'asse rachidiano. Venezia, 1897. 8°.
Id. — Una sentenza di Marcello Malpighi. Venezia. 1898. 8°.

Féral C. — Observations météorologiques sur les pluies générales et les tempêtes. Albi, 1897. 8°.

Galilei G. — Le opere. Ediz. Naz. Vol. VII. Firenze, 1897. 4°.

Ganfini G. — Sulle alterazioni delle cellule nervose dell' asse cerebro-spinare, consecutive all' inanizione. Firenze, 1897. 8°.

Gill D. E. — Determination (A) of the Solar parallax and Mass of the Moon from Heliometer observations of the minor Planetes Iris, Victoria and Sappho, made in the Years 1888 and 1889 at the R. Observatory, Cape of Good Hope Vol. I. II. London, 1896-97. 4°.

Gill D. and *Kapteyn J. C.* — The Cape photographic Durchmusterung for the Equinox 1875, p. I. Zones 18° to - 37°. London, 1896. 4°.

Lacroix A. — Des Closzeaux. Paris, 1898. 4°,

Lorenz L. — Oeuvres scientifiques T. I. 2. Copenhague, 1898. 8°.

Mattirolo O. — L' Opera botanica di Ulisse Aldrovandi (1549-1605. Bologna, 1898. 8°.

Paladini E. — Commemorazione di F. Brioschi. Milano, 1898. 8°.

Saija G. — Los instrumentos de reflexión y la determinacion de la altura de las nubes . S. l. 1898. 8°.

Saija G. e *Marinelli O.* — Saggio di una classificazione elementare delle proiezioni geografiche. Firenze, 1897. 8°.

Salmoiraghi F. — Contributo alla limnologia del Sebino. Milano, 1897-98. 8°.

Savastano L. — Note di patologia arborea. Napoli, 1897. 8°.

Id. — Note preliminari per un arboricoltura comparata. Napoli, 1897. 8°.

Vailati G. — Il metodo deduttivo come strumento di ricerca. Torino, 1898. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 marzo 1898.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Botanica. — *Sulla presenza di elementi vascolari plurinucleati nelle Dioscoreacee.* Sunto del Corrispondente R. Pirotta e del dott. L. Buscalioni.

Le importanti e spesso singolari particolarità morfologiche ed anatomiche presentate dalle piante appartenenti alla famiglia delle Dioscoreacee hanno attirata l'attenzione di numerosi botanici, cosichè questa famiglia di Monocotiledoni è stata oggetto di non poche pubblicazioni. Una delle questioni più dibattute, e non per anco a nostro parere risoluta, è quella relativa al valore morfologico ed alla costituzione dei fasci vascolari del caule, della quale si occuparono specialmente Mohl, Nägeli, Karsten, Russow, Falkenberg, De Bary, Kny, Solms, Iungner, Guillaud e recentissimamente il Bucherer (1889) e il Queva (1894).

Ora è un fatto curioso, che malgrado le numerose ricerche anatomiche, istologiche ed in parte anche istogeniche fatte allo scopo di risolvere la detta questione o per ricercare la struttura anatomica del caule, della foglia e della radice, nessuno degli autori, almeno di quelli a noi noti, abbia fatto il più piccolo cenno di una particolarità interessantissima offerta dai vasi di queste piante, che noi crediamo affatto nuova e intorno alla quale abbiamo condotto le ricerche che qui brevemente riassumiamo [1] durante lo studio da noi fatto

[1] Il lavoro corredato da tavole illustrative è in corso di stampa per l'*Annuario del R. Istituto Botanico di Roma*, vol. VII.

sulla origine degli elementi vascolari nelle radici delle Monocotiledoni [1]. Abbiamo fatto soggetto delle nostre ricerche alcune specie del genere *Dioscorea* ed il *Tamus communis*, solo materiale che abbiamo avuto a disposizione in quantità sufficiente. Rimandando i lettori che desiderassero particolari maggiori al lavoro completo, ci limiteremo ad esporre in questa Nota i risultati principali dedotti dallo studio delle *Dioscorea*, essendo nel *Tamus* le cose molto simili, salvo alcuni particolari.

Nel *caule* delle *Dioscorea* i fasci vascolari hanno dimensioni diverse e sono disposti verso la periferia del cilindro centrale in modo che i più voluminosi alternano con quelli di minor dimensione. Questi ultimi presentano, allo stato adulto, verso l' estremo interno dei piccoli vasi spirali od annulari, ai quali ne seguono altri più grandi in due linee divergenti quasi a V, a capo delle quali si trovano due grandi vasi. I fasci maggiori sono generalmente distinti in due porzioni separate da una zona di tessuto parenchimatico, ognuna comprendente porzione vascolare e porzione cribrosa. Di esse l' interna e più grande ha pure vasi spirali piccoli all' estremità rivolta verso il centro seguiti da una serie di altri che diventano sempre più grandi coll' avanzarsi verso la periferia. All' esterno di essi, separati dalla porzione cribrosa stanno due grandissimi vasi a contatto o separati da parenchima, talora ridotti ad uno solo. La porzione esterna, più piccola, dei fasci maggiori presenta ai lati della porzione cribrosa uno o due grandi vasi avvolti da parenchima.

I grandi vasi dei diversi fasci, sempre avvolti da una serie regolare di cellule rettangolari, hanno, allo stato adulto parete lignificata, ad ispessimento punteggiato, di solito a punteggiature areolate, talora semplici o alveolato-reticolate. Anche le pareti trasversali, di solito oblique, che separano i diversi elementi costitutivi del vaso, sono fornite di ispessimenti reticolati, e le maglie talora sono pervie, tal' altra chiuse da una membranella sottile, che coll' ematossilina lascia vedere numerose piccolissime areole incolore, che danno alle lamelle l' aspetto di un cribro.

Nelle *foglie* delle *Dioscoree*, i grandi vasi sopra descritti si trovano nei fasci del picciolo e in quelli delle grandi e piccole nervature; mancano soltanto alle nervature più minute. Sono però sempre più piccoli di quelli del caule.

Nelle *radici* i raggi vascolari sono fatti da serie radiali di vasi, piccoli all' esterno e man mano più grandi verso l' interno, che è occupato da pochi vasi enormi per dimensioni, che si toccano spesso fra loro e contro i quali appoggiano i vasi dei raggi stessi, dei quali sembrano come continuazione ma meno regolare. Questi grandi vasi allo stato adulto hanno le pareti divisorie dei loro elementi, orizzontali od oblique, perforate, sono lignificati e ad ispessimento punteggiato.

Nei *tuberi* ipogei mancano questi grandi vasi.

[1] Vedi questi stessi *Atti*, vol. VII, p. 60, 1° sem., 1898.

Se noi studiamo lo sviluppo dei vasi, vediamo che nel *caule*, dal meristema omogeneo in attiva segmentazione del punto vegetativo si differenziano presto uno strato centrale a grandi elementi ed uno periferico ad elementi più piccoli. In questi ultimi ben presto appaiono i fascetti procambiali fatti da piccole cellule e separati fra loro da cellule più grandi che si differenziano in elementi del tessuto fondamentale. I fasci procambiali si presentano subito di diversa dimensione, ed i più grandi ben presto si sdoppiano in due porzioni disuguali, una esterna più piccola ed una interna più grande, per opera di un piano di cellule, che passa allo stato di tessuto parenchimatico. I piccoli fasci procambiali non si dividono.

La differenziazione degli elementi vascolari non è sempre perfettamente centrifuga. Compariscono infatti per primi i piccoli elementi spirali ed anulari dell' estremo interno della porzione interna dei grandi fasci procambiali che si lignificano rapidamente, e un po' più tardi gli stessi elementi all' estremità interna dei piccoli fasci procambiali.

Talora contemporaneamente, tal' altra appena dopo, verso la parte più esterna della porzione esterna del fascio procambiale maggiore, una o due cellule aumentano di dimensioni notevolmente e rapidamente, dando origine ai due maggiori fra i grandi vasi. Gli altri dei grandi vasi hanno origine più tardi da cellule disposte in serie radiali. Quasi nella stessa epoca hanno origine i grandi vasi dei piccoli fasci procambiali.

Nelle *radici* le cose si comportano come noi già abbiamo fatto conoscere per le Monocotiledoni in generale ([1]). Lo sviluppo cioè è centrifugo. I primi vasi a differenziarsi sono i grandissimi centrali, che nascono direttamente dalla massa meristematica del punto vegetativo e compaiono in forma di serie di cellule non molto lunghe, ma notevolmente più ampie delle circostanti. Seguono man mano gli altri vasi decrescenti di dimensioni, differenziantisi man mano più lontano dal punto vegetativo e nel mantello periferico di meristema, e finalmente appariscono i più esterni e più piccoli. Anche in queste piante la lignificazione comincia negli elementi più piccoli e ultimi formatisi e procede lenta centripetamente verso gli altri prima formatisi.

I vasi di grande e di media dimensione, sopratutto del caule e della radice provengono dunque da serie di cellule prima rettangolari in sezione longitudinale, che ben presto spiccano sugli altri elementi per le loro dimensioni.

In questo stadio le cellule del futuro vaso sono ricche di citoplasma, nel mezzo del quale presentano un nucleo relativamente grande con grosso nucleolo, a membrana distinta ma con reticolo cromatico non molto manifesto, almeno col trattamento all' ematossilina. Il nucleolo è circondato da un areola ampia incolore e presenta di rado vacuoli.

([1]) Vedi nota alla pagina precedente.

Appena però le cellule suddette cominciano ad allungarsi per accrescimento intercalare, *incomincia subito la moltiplicazione del nucleo* e con tale rapidità, che già a poca distanza le cellule si presentano con più nuclei. La moltiplicazione nucleare avviene d' ordinario per cariocinesi e si ripete parecchie volte di seguito a misura che gli elementi costitutivi dei giovani vasi si vanno allungando, *cosichè ad un dato momento i nuclei si contano a centinaia nell' interno di ogni singola cellula.*

È poi interessante il fatto, che anche in queste cellule plurinucleate, come nei laticiferi delle Orticacee ecc., nei sacchi embrionali delle Fanerogame ecc. ha luogo la divisione contemporanea di tutti quanti i nuclei di ogni singola cellula, e talvolta il processo si estende con sorprendente regolarità alle cellule sovrastanti o sottostanti. In alcuni rari casi soltanto abbiamo osservato, che il processo cariocinetico non colpisce contemporaneamente tutti i nuclei di una stessa cellula.

La tumultuosa moltiplicazione dei nuclei di queste cellule è causa talvolta di anomalie nel processo cariocinetico. Noi ricorderemo qui soltanto fra le più interessanti, la comparsa di figure di frammentazione cariocinetica in quelle cellule del vaso in via di differenziazione, che si trovano ad una certa distanza dall' apice vegetativo e nelle quali il processo cariocinetico si avvicina alla sua fine. In esse i nuclei che stanno per entrare in cariocinesi sono spesso come vescicolosi e presentano un reticolo molto lasso ed uno o due nucleoli piuttosto grossi. D' ordinario questi nuclei percorrono ancora le fasi cariocinetiche; talvolta si dividono invece semplicemente in due metà, che si allontanano l' una dall' altra, mantenendosi per un certo tempo ancora unite per mezzo di un delicato filuzzo cromatico.

Abbiamo anche osservati dei casi, nei quali i due nuclei secondarî in via di slontanarsi, contengono nel loro interno un certo numero di cromosomi spezzati trasversalmente, i quali, non essendo presenti i fili acromatici connettivali, riteniamo rappresentino casi di processi di frammentazione cariocinetica analoghi a quelli già segnalati da uno di noi, e non già semplici anomalie cariocinetiche analoghe a quelle studiate dal Dixon.

Esaurito il processo cariocinetico, che possiamo seguire talora a considerevole distanza dall' apice vegetativo, le cellule che costituiranno il vaso, si allungano straordinariamente e nello stesso tempo si allargano. In questo stadio però le pareti sono ancora sottili e non lignificate e le trasversali non accennano ancora a riassorbirsi. Ma il citoplasma assume struttura schiumosa ed i nuclei, disposti prima con un certo ordine, sono ora irregolarmente ammucchiati. Poi essi entrano in una fase regressiva, che conduce alla loro scomparsa, i cui particolari, sopratutto intorno alla frammentazione dei nucleoli troverà il lettore nel nostro lavoro. Scomparsi i nuclei, scompare anche il citoplasma, mentre contemporaneamente le pareti delle cellule cominciano ad ispessirsi ed a mostrare le caratteristiche punteggiature; si differenzia cioè

il vaso. Anche le membranelle che chiudono le maglie dei setti trasversali non tardano a scomparire nei vasi delle radici e nella maggior parte di quelli del caule, formandosi allora veri vasi pervii; solo in alcuni casi anche nello stato adulto il riassorbimento non avviene ed allora i vasi restano impervii.

Nel caule delle *Dioscorea* da noi studiate, che come è noto è volubile, il processo di differenziazione dura a lungo, poichè la regione in accrescimento dell'apice vegetativo è molto estesa e comprende numerosi internodî; cosichè, pur non avendo noi eseguite misure precise, possiamo tuttavia dire, che l'ispessimento delle pareti degli elementi costitutivi dei grandi vasi comincia soltanto ad una distanza di 10 e più centimetri dall'apice.

Le nostre ricerche ci hanno condotto dunque a trovare nei fasci vascolari delle Dioscoreacee dei vasi prodotti dalla fusione di cellule che sono originariamente uninucleate, ma diventano poi plurinucleate e moltinucleate prima della differenziazione definitiva in vaso. Questi vasi sono quelli di grandi dimensioni, che si riscontrano anche p. es. nelle radici di tutte le Monocotiledoni da noi studiate e dei quali abbiamo, come si è detto, già esposta l'origine. Ma in questi vasi, almeno per le piante che fecero soggetto delle nostre ricerche, sono sempre uninucleate le cellule che si fondono per formarli, come uninucleati sono stati indicati finora tutti i vasi a parete lignificata e scolpita dai ben noti ispessimenti non uniformi. Il caso da noi osservato è dunque finora unico.

Qual'è il valore morfologico di questi vasi delle Dioscoreacee?

Noi non vogliamo pronunciarci in questa Nota su questa questione. Accenneremo soltanto alla omologia, nell'origine, coi vasi laticiferi, le cui cellule sono pure moltinucleate. Ma l'omologia si arresta ben presto, perchè la differenziazione successiva nelle due sorta di fusioni cellulari procede negli ultimi stadii in modo ben differente.

Matematica. — *Sopra la forma degli invarianti differenziali.* Nota del dott. PAOLO MEDOLAGHI, presentata dal Socio CREMONA.

Il teorema che io dimostro in questa Nota si può considerare come una generalizzazione di quello da me già dimostrato sopra le equazioni di definizione delle trasformazioni finite di un gruppo continuo. Io ho trovato [1] che queste equazioni hanno la forma:

$$(1)\qquad I_k\left\{\varpi_1(y_1\dots y_n)\,,\dots\varpi_m(y_1\dots y_n)\,;\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\,,\dots\right\}=\varpi_k(x_1\dots x_n)\,:$$

ora dirò che le funzioni $\varpi_1\dots\varpi_m$ sono le *funzioni caratteristiche* del gruppo. Variando le funzioni caratteristiche si hanno tutti i gruppi simili ad (1).

[1] Annali di Matematica, maggio 1897.

Ricordo ancora che le equazioni

$$I_k \{ z_1 , \dots z_m ; a_{11} , \dots \} = z_k^0$$
$$k = 1 \dots m$$

ottenute dalle (1) cambiando soltanto significato alle quantità che vi intervengono, sono le equazioni finite di un gruppo la cui composizione dipende soltanto dal numero n delle variabili e dall'ordine s delle equazioni di definizione (e che io rappresento perciò col simbolo γ_{sn}).

Ciò posto, il teorema a cui è destinata la presente Nota è il seguente:

Negli invarianti differenziali di ogni gruppo continuo le variabili dipendenti ed indipendenti entrano soltanto sotto le funzioni caratteristiche.

Variando queste funzioni, si passa dagli invarianti differenziali di un gruppo a quelli di tutti i gruppi simili.

Infine, considerando le derivate e le funzioni caratteristiche come argomenti, gli invarianti differenziali altro non sono che gli invarianti (di ordine zero) di gruppi intransitivi con la composizione γ_{sn}.

Sia una trasformazione infinitesima qualunque nelle variabili $x_1 , \dots x_n$:

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} ;$$

e distribuiamo le $x_1 \dots x_n$ in due serie: le une, che indicheremo con $u_1 \dots u_p$, si considerino come variabili indipendenti; le rimanenti, che indicheremo con $v_1 \dots v_q$, $(q + p = n)$ come funzioni delle $u_1 \dots u_p$. Conveniamo infine di rappresentare con $w_1 , \dots w_{\mu_s}$ le derivate fino all'ordine s delle v rispetto alle u. Il caso che alcune delle variabili dipendenti od indipendenti non siano trasformate non ha ragione di essere particolarmente considerato; esso corrisponde all'ipotesi che alcune delle ξ_i siano nulle.

Estendendo (¹) la Xf alle derivate $w_1 , \dots w_{\mu_s}$, si ottiene una trasformazione della forma:

$$Xf + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu_1 \dots \nu_n}^{0 \dots s} \frac{\partial^{\nu_1 + \dots + \nu_n} \xi_i}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}} \overline{X}_{i, \nu_1 \dots \nu_n} \qquad (\nu_1 + \dots + \nu_n \leq s)$$

in cui le $\overline{X}_{i, \nu_1 \dots \nu}$ sono trasformazioni infinitesime nelle sole variabili $w_1 \dots w_{\mu_s}$ e che non dipendono in nessun modo dalle funzioni $\xi_1 \dots \xi_n$.

Le trasformazioni $\overline{X}_{i, \nu_1 \dots \nu_n}$ generano per loro conto un gruppo (²) nelle variabili $w_1 , \dots w_{\mu_s}$; ora è importante notare che la composizione di questo gruppo dipende soltanto dal numero complessivo n delle variabili $x_1 \dots x_n$ e dall'ordine s della estensione; non dipende affatto dalla scelta delle va-

(¹) *Theorie der Transformationsgruppen.* Abschnitt. I, Capit. 25.

(²) Memoria citata (teorema III).

riabili indipendenti e dipendenti, e nemmeno dal numero delle prime e delle seconde. Questa composizione è quella che io rappresento col simbolo γ_{sn} e che ho già avuto occasione di ricordare.

Introduciamo ora una serie di variabili $y_1 \dots y_n$ non trasformate, consideriamo le $x_1 \dots x_n$ come tutte indipendenti tra loro, le $y_1 \dots y_n$ invece come funzioni delle $x_1 \dots x_n$, ed indichiamo con $a_1, \dots a_{ms}$ le derivate delle y rispetto alle x fino all' ordine s.

La Xf estesa alle $a_1 \dots a_{ms}$ prende la forma:

$$Xf + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu_1 \dots \nu_n}^{0 \dots s} \frac{\partial^{\nu_1 + \dots + \nu_n} \xi_i}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}} X_{i, \nu_1 \dots \nu_n} \qquad (\nu_1 + \dots + \nu_n \leqq s)$$

in cui le $X_{i, \nu_1 \dots \nu_n}$ sono trasformazioni nelle variabili $a_1 \dots a_{m_s}$; esse formano un gruppo con la composizione γ_{sn}: di questo gruppo sappiamo inoltre che esso è semplicemente transitivo [1]. Il sistema di valori:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \varepsilon_{ik} \quad (\varepsilon_{ik} = 0 \quad \text{per} \quad i \gtrless k, \ \varepsilon_{ii} = 1), \quad \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \dots$$

si indicherà con $a_1^0, \dots a_{m_s}^0$.

Proponiamoci ora di: *esprimere le derivate $w_1, \dots w_{\mu_s}$ delle v rispetto alle u, in funzione delle derivate $a_1 \dots a_{m_s}$ delle y rispetto alle x, in modo che pel sistema di valori $a_1 = a_1^0, \dots a_{m_s} = a_{m_s}^0$ assumano i valori iniziali $w_1^0, \dots w_{\mu_s}^0$.*

Questo problema è stato da me già trattato nella Memoria più volte citata. Si trovano delle equazioni

$$w_j^0 = \Phi_j (w_1 \dots w_{\mu_s} ; \ a_1, \dots a_{m_s}) \qquad j = 1 \dots \mu_s \tag{2}$$

che risolute rispetto a $w_1, \dots w_{\mu_s}$ darebbero le espressioni cercate. Noi possiamo del resto per ciò che segue fare a meno di questa risoluzione.

Le (2) sono le equazioni finite di un gruppo con la composizione γ_{sn}; i parametri della trasformazione identica sono $a_1^0, \dots a_{m_s}^0$. È anche chiaro il significato delle (2): ricordando il procedimento seguìto per formarle, si vede che esse sono affatto indipendenti dalla natura delle funzioni $\xi_1 \dots \xi_n$. Esse dunque rappresentano il modo col quale per una trasformazione generica nelle variabili $x_1 \dots x_n$ vengono trasformate le derivate delle v rispetto alle u.

Come le $\overline{X}_{i, \nu_1 \dots \nu_n}$ sono le trasformazioni infinitesime del modo di estensione considerato, così le (2) ne sono le equazioni finite.

Si giunge ora immediatamente al teorema enunciato nel principio di questa Nota.

[1] Lie, *Grundlagen für die Theorie der unendl. Tr. gruppen* (Leipziger Berichte 1891).

Sia un gruppo qualunque nelle variabili $x_1 \dots x_n$. Allora hanno luogo le equazioni:

$$(3) \qquad \varpi_k(x_1 \dots x_n) = \mathrm{I}_k \{ \varpi_1(y_1 \dots y_n), \dots \varpi_m(y_1 \dots y_n) ; a_1 \dots a_{m_s} \} \\ k = 1 \dots m .$$

Tra le quantità $x_1 \dots x_n, w_1^0 \dots w_{\mu_s}^0, y_1 \dots y_n, w_1 \dots w_{\mu_s}$ non hanno luogo altre relazioni che le (2), (3): gli invarianti differenziali si ottengono dunque per combinazione di queste equazioni. Essi sono i primi membri in equazioni della forma:

$$\Omega \{ \varpi_1(x), \dots \varpi_m(x), w_1^0 \dots w_{\mu_s}^0 \} = \Omega \{ \varpi_1(y), \dots \varpi_m(y), w_1 \dots w_{\mu_s} \}$$

questo appunto volevo dimostrare.

Aggiungerò alcune considerazioni sopra i gruppi rappresentati dalle (2).

1. Dalle equazioni relative alle $w_1, \dots w_{\mu_s}$ si ottengono, per derivazione rispetto $u_1 \dots u_p$, tutte quelle relative alle $w_{\mu_s+1}, \dots w_{\mu_{s+1}}$. Quindi tutte le equazioni (2) si ottengono per derivazione da certe equazioni

$$(2') \qquad w_j^0 = \Phi_j(w_1 \dots w_{\mu_1}, a_1 \dots a_{m_1}) \\ j = 1 \dots \mu_1$$

che formano un gruppo isomorfo al gruppo lineare omogeneo in n variabili (perchè, come si sa, la composizione γ_{1n} è quella del gruppo lineare omogeneo in n variabili).

D'altra parte [1] le (2′) si possono formare mediante risoluzione di equazioni algebriche, eliminazioni, ed una quadratura al più. Brevemente diremo che *le equazioni* (2) *si formano con operazioni effettuabili.*

Segue già di qui che la determinazione degli invarianti differenziali non richiede che operazioni effettuabili quando si conoscano le equazioni di definizione delle trasformazioni finite — circostanza già nota [2].

Anche le formazione delle (3) non richiede, nei gruppi transitivi, che operazioni effettuabili. Dunque: *la determinazione degli invarianti differenziali di un gruppo transitivo, di cui sono date le equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime, non richiede che operazioni effettuabili.*

2. I gruppi rappresentati dalle (2) sono sempre transitivi: se infatti vi fossero degli invarianti:

$$\Omega_1(w_1^0 \dots w_{\mu_s}^0) = \Omega_1(w_1 \dots w_{\mu_s}), \dots$$

questi sarebbero degli invarianti differenziali pel gruppo di tutte le trasformazioni in $x_1 \dots x_n$; poichè questo gruppo trasforma una varietà qualunque

[1] *Theorie der Transformationsgruppen.* Abschnitt III. Theorem. 53.

[2] Lie, *Ueber Differentialinvarianten.* Math. Ann. 24.

contenuta in $R_n:x_1 \dots x_n$ in ogni altra varietà di egual numero di dimensioni, si vede che invarianti siffatti non possono esistere.

La via tenuta per formare gli invarianti differenziali ci suggerisce anche una estensione del concetto di invariante differenziale. Il Killing in un lavoro, *Ueber die Erweiterung des Invariantenbegriffs* (Math. Ann. Bd. 35), ed il Lie nella prima parte dellla *Theorie der Transformationsgruppen*: si sono occupati di una estensione analoga per gli invarianti di ordine zero. Ma gli invarianti a cui mi propongo di accennare non mi sembra siano stati ancora da nessuno considerati.

Imaginiamo di avere formate le equazioni finite (analoghe dunque alle (2)) per un numero qualunque di estensioni diverse. Per fissare le idee e per considerare il caso più semplice, supponiamo di avere fatta un' altra distribuzione delle $x_1 \dots x_n$ in due serie di variabili; siano questa volta $\overline{u}_1 \dots \overline{u}_{p_1}$ le variabili indipendenti, e siano $\overline{v}_1 \dots \overline{v}_{q_1}$ le dipendenti $(q_1 + p_1 = n)$. Indichiamo con $\overline{w}_1 \dots \overline{w}_{\nu_s}$ le derivate delle $\overline{v}$ rispetto alle $\overline{u}$ fino all' ordine s.

Analogamente alle (2), si hanno delle equazioni:

$$(2') \qquad \overline{w}_j^0 = \psi_j(\overline{w} \dots \overline{w}_{\nu_s}\,,\ a_1 \dots a_{m_s}) \qquad j = 1 \dots \nu_s$$

che rappresentano anche esse, come le (2) e le (3), un gruppo con la composizione γ_{sn}. Considerando l' insieme delle (2), (2'), (3) si hanno tre specie di invarianti:

invarianti composti con le $\varpi_1 \dots \varpi_m\ w_1 \dots w_{\mu_s}$;

invarianti composti con le $\varpi_1 \dots \varpi_m\ \overline{w}_1 \dots \overline{w}_{\nu_s}$;

invarianti composti con le $\varpi_1 \dots \varpi_m, w_1 \dots w_{\mu_s}, \overline{w}_1 \dots \overline{w}_{\nu_s}$ e che non si possono esprimere con soli invarianti delle due prime categorie. Invarianti di questa natura ve ne sono sempre in generale: fanno eccezione soltanto i gruppi che non hanno nell' intorno di un punto generico altro che trasformazioni di ordine zero.

Per questi nuovi invarianti vale naturalmente il teorema enunciato nel principio di questa Nota; le nozioni di invariante relativo, parametro differenziale, ... si estendono facilmente anche a questi invarianti più generali. Anche il bel teorema di Tresse [1] relativo ai criterî di equivalenza di due varietà vale per gli invarianti di cui ci occupiamo. La loro teoria non differisce in sostanza da quella degli invarianti ordinarî: essi si determinano, come questi ultimi, con operazioni effettuabili quando il gruppo da cui si parte è transitivo.

[1] Tresse, *Sur les invariants différentiels* (Acta Matematica, vol. 18).

Fisica. — *Studio sperimentale sopra la capacità dei condensatori* (¹). Nota dell'ing. Ferdinando Lori, presentata dal Socio Blaserna.

Un corpo dielettrico, secondo l'ordinario concetto teorico, è un corpo, il quale offre un ostacolo assoluto al passaggio dell'elettricità e, quando viene adoperato per fabbricare un condensatore, dà origine ad una capacità perfettamente definita ed invariabile, qualunque sia la differenza di potenziale applicata alle armature e qualunque sia il tempo durante il quale questa differenza di potenziale agisce. Nessuno dei corpi esistenti in natura possiede queste proprietà in modo rigoroso, e lo studio delle loro deviazioni dalle leggi, che abbiamo enunciato, ha fornito ai fisici occasione di numerose e pazienti ricerche sperimentali.

Riguardo alla propagazione dell'elettricità attraverso i dielettrici, due specie di conduttività sono da distinguere:

1°. una conduttività che può chiamarsi ohimica, sottoposta alle medesime leggi di quella dei corpi conduttori propriamente detti, e per la quale non ha alcuna influenza l'elemento tempo;

2°. una conduttività o assorbimento o penetrazione, per cui l'elettricità, che esiste alla superficie di un dielettrico penetra a poco a poco nel suo interno e quella del suo interno torna gradatamente alla superficie, secondo la direzione della forza elettrica agente nel luogo dove l'elettricità libera esiste: questa conduttività dipende dalla grandezza di questa forza e dalla durata della sua azione.

Riguardo alla capacità di un condensatore fatto con un dato dielettrico, gli autori hanno parimente osservato variazioni, che dipendono da elementi molteplici e diversi secondo il metodo, che hanno impiegato per determinarla. Le ipotesi principali enunciate a proposito di questo fenomeno sono due: secondo l'una il dielettrico sarebbe sede di una polarizzazione elettrolitica proporzionale alla quantità totale di elettricità libera consumata: secondo l'altra la capacità di un condensatore, oltrechè dalla differenza di potenziale fra le armature, dipenderebbe da tutte le elettrizzazioni precedenti, analogamente a quello che accade per le sostanze magnetiche, in cui la permeabilità in ciascun elemento dipende, oltrechè dalla forza magnetizzante, da tutte quante le vicende, cui quell'elemento si è trovato sottoposto a partire dal suo stato vergine. Gli autori hanno preso dalla teoria del magnetismo anche

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica-tecnica della R. Scuola di Applicazione per gli Ingegneri di Roma, dal gennaio al marzo 1898.

il vocabolo per indicare questo fenomeno, cui hanno dato il nome di *isteresi elettrostatica*.

Secondo questo modo di considerare il fenomeno stesso, come la magnetizzazione di un pezzo di ferro immerso in un campo magnetico è funzione, oltrechè dell' intensità del campo, anche di altri elementi; così uno strato di dielettrico chiuso fra due armature, allorchè queste vengono portate ad una determinata differenza di potenziale, acquisterebbe una polarizzazione elettrica, funzione di altre variabili, oltrechè di questa differenza di potenziale.

E come un pezzo di ferro sottoposto ad un campo magnetico oscillante con periodo costante fra due limiti fissi, fra cui varia con legge qualunque, acquista una magnetizzazione anch' essa variabile col tempo con periodo costante, in modo che la curva luogo dei punti aventi in un piano cartesiano per ascisse le intensità del campo e per ordinate le intensità della magnetizzazione, risulta composta di tanti cicli chiusi sovrapponentisi, di area non nulla, corrispondenti ai singoli periodi: così il dielettrico di un condensatore sottoposto ad un campo elettrico alternativo fra due valori limiti determinati acquisterebbe successivamente cariche variabili secondo un certo periodo, e la curva rappresentativa della quantità di elettricità di ciascuna delle armature in funzione della loro differenza di potenziale risulterebbe composta di cicli successivi di area non nulla corrispondenti ai periodi del campo.

Le numerose ricerche eseguite in questi ultimi anni da Ewing e da' suoi seguaci sulle proprietà magnetiche del ferro, e l' elegante ed interessante contributo, che vi ha portato l' introduzione del concetto di isteresi magnetica, hanno spinto i fisici a riprendere con questo nuovo indirizzo le esperienze sulle proprietà dei dielettrici, che pure erano state fatte copiosamente in varie epoche.

Il fenomeno dell' isteresi in un pezzo di ferro sottoposto ad un campo alternativo, può essere considerato come uno spostamento fra la magnetizzazione indotta e la forza che la induce o come una dissipazione di energia nel seno stesso della sostanza magnetica.

Sotto il primo aspetto considerò il fenomeno elettrico il signor Bouty, il quale nel 1890 (1) studiò diffusamente il comportamento di un condensatore di mica, misurando in funzione del tempo il quoziente della forza elettromotrice della corrente di un circuito costituito da una pila Daniell, il condensatore ed una resistenza molto grande in grafite.

Sotto il secondo aspetto più autori lo considerarono. La dissipazione dell' energia in un dielettrico sottoposto a scariche oscillanti fu osservata nel 1890 (2) dai signori Trowbridge e Sabine, che studiarono le scariche oscillanti che si possono ottenere da un condensatore ad aria, fotografandole

(1) Journal de Physique, V. IX, pag. 288.
(2) Phyl. Mag., V. XXX, pag. 323.

col metodo dello specchio girante di Feddersen, e confrontarono i risultati sperimentali con quelli che si ottengono dalla formula del Thomson.

Lo stesso studio delle scariche oscillanti condusse il Janet (¹) ad imaginare un metodo per determinare sperimentalmente l' andamento della differenza di potenziale fra le armature di un condensatore in funzione della totale quantità di elettricità che le aveva caricate. Veramente le esperienze citate dal Janet non sono numerose, nè abbracciano un campo esteso delle variabili da cui il fenomeno dipende : ma tuttavia egli afferma che ad uguali differenze di potenziale corrispondono cariche meno grandi durante il semiperiodo dei potenziali crescenti, e più grandi durante il semiperiodo dei potenziali decrescenti.

La misura diretta dell' energia dissipata in un condensatore caricato mediante una differenza di potenziale alternativa è stata fatta per la prima volta dal signor Steinmetz (²) mediante il wattmetro. Egli trovò che quest' energia è proporzionale sensibilmente al quadrato del valore efficace della differenza di potenziale adoperata per caricare il condensatore.

La stessa misura fu anche eseguita, ma con metodo diverso dal signor Arnò (³), il quale si valse del fenomeno della rotazione di un dielettrico in un campo rotante elettrostatico, e giunse alla conclusione che l' energia dissipata da un dielettrico durante un processo ciclico di elettrizzazione è sensibilmente proporzionale alla potenza 1, 6 della differenza di potenziale efficace impiegata per la creazione del campo elettrico.

Dagli interessanti lavori, che ho citato e che sono i principali su tale argomento, ho attinto l' idea di cercare di ottenere mediante esperienze dirette gli elementi del ciclo di elettrizzazione. Cioè mi sono proposto di sottoporre le armature di un condensatore ad una differenza di potenziale variabile a piacimento fra un massimo $+E$ ed un minimo $-E$, e di misurare ad ogni istante tanto la differenza di potenziale quanto la quantità di elettricità posseduta dalle armature. Lo studio è stato da me fatto sopra un condensatore campione di mica fabbricato dalla casa Siemens della capacità di un microfarad. Il circuito elettrico era costituito come è rappresentato nella qui unita figura.

In questa: C è il condensatore, avente una delle armature in comunicazione con la terra :

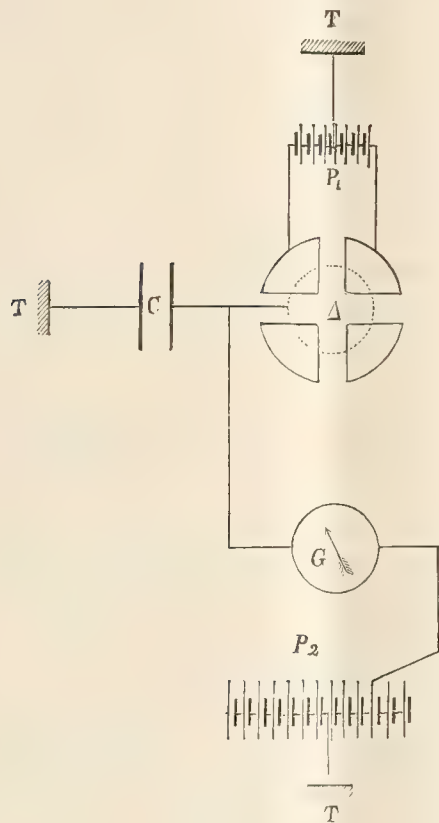
Δ un elettrometro a quadranti del tipo Mascart, di cui l' ago era in comunicazione con l' altra armatura del condensatore, e le due coppie di quadranti erano in comunicazione con le estremità di una pila avente il centro a terra :

(¹) Comptes rendus V. 116, pag. 373.

(²) Elek. Zeit., 1892, pag. 227.

(³) Rend. Lincei, serie 5ª, vol. I, pag. 284; vol. II, pag. 341.

G è un galvanometro del tipo Siemens con quattro rocchetti e due magneti a campana, che io adoperavo come balistico :

P_2 una pila col centro a terra :

M un conduttore isolato, la cui estremità io mettevo a piacimento in contatto con uno qualunque degli elementi della pila P_2.

Spostando successivamente il contatto M fra un elemento a destra ed uno a sinistra del centro della pila P_2, potevo ottenere una variazione ciclica dell' elettrizzazione del condensatore : le letture all' elettrometro mi davano in ogni istante direttamente la differenza di potenziale fra le armature, mentre le letture al galvanometro balistico mi davano la quantità di elettricità accumulata per ogni carica, e le somme successive mi davano la quantità di elettricità totale in corrispondenza d' ogni valore della differenza di potenziale.

Numerose ed estese misure eseguite in tal modo mi fornirono in pricipio risultati molto irregolari, da cui non mi fu dato dedurre alcuna legge semplice, finchè scopersi che le condizioni necessarie, affinchè il fenomeno si presenti sotto un determinato regime stabile e si riproduca con la stessa intensità, sono le seguenti :

1°. Caricare e scaricare varie volte (alcune diecine) il condensatore fra limiti più estesi di quelli fra cui deve essere contenuto il ciclo che si studia.

2°. Fra le successive cariche, cioè fra i successivi contatti, ciascuno dei quali era istantaneo, del punto M con gli elementi della pila, far trascorrere un tempo breve e costante. Il tempo da me adoperato fu un minuto primo. Esso non era sufficiente perchè l'elettrometro giungesse alla posizione di equilibrio, ma io deduceva questa posizione mediante lettura di tre elongazioni successive.

Quando tali condizioni venivano soddisfatte, le misure presentavano una grande regolarità, e il ciclo disegnato assumendo come ascisse le differenze di potenziale, come ordinate le quantità di elettricità date al condensatore (somma algebrica delle successive letture al galvanometro balistico) coincideva con una linea retta passante per l'origine delle coordinate: cioè nessuna traccia di isteresi elettrostatica, almeno nel senso qui espresso, compariva.

Per dare un' idea del grado di esattezza delle misure, riproduco nella seguente tabella gli elementi di due cicli comunque scelti fra quelli da me sperimentati. Ciascuno fu ripetuto quattro volte ed io riproduco i numeri relativi a ciascuna esperienza. Le prime quattro colonne contengono i valori della differenza di potenziale: la quinta la loro media: le quattro successive dalla 6ª alla 9ª contengono i valori delle cariche: la decima la loro media: l' undecima contiene i quozienti delle differenze fra i successivi numeri della prima colonna ed il primo di essi divise per i numeri della decima, i quali quozienti rappresentano i valori inversi della capacità in corrispondenza dei singoli punti del ciclo: la duodecima finalmente contiene le deviazioni δ dei numeri contenuti nella tabella undecima dalla loro media, che è segnata alla fine della medesima colonna.

1° Ciclo.

ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	ν_m	q_1	q_2	q_3	q_4	q_m	$\frac{\nu_m - a}{q_m}$	δ
37.12	37.01	36.99	37.00	a=37.03	0	0	0	0	0	—	—
65.61	65.41	65.54	65.60	65.54	8.05	8.10	8.06	8.09	8.07	3.533	+ 0.029
88 06	88.10	88.07	88.07	88.07	14.43	14.57	14.46	14.57	14.51	3.512	+ 0.008
110.65	110.64	110.63	110.61	110.63	20.94	21.04	20.92	21.00	20.98	3.508	+ 0.004
140.06	139.96	139.91	139.99	139.98	29.34	29.42	29.22	29.32	29.32	3.511	+ 0.007
111.14	111.19	111.10	111.12	111.14	21.20	21.31	21.17	21.24	21.23	3.491	— 0.013
88.56	88.57	88.55	88.49	88.52	14.70	14.88	14.72	14.83	14.78	3.483	— 0.021
66.00	66.02	65.97	66.01	66.00	8.21	8.38	8.28	8.37	8.31	3.490	— 0.014
37.01	36.99	37.00	37.01	37.00	— 0.17	+ 0.04	— 0.08	+ 0.03	— 0.04		
										3.504	

2° Ciclo.

ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	ν_m	q_1	q_2	q_3	q_4	q_m	$\frac{\nu_m - a}{q_m}$	δ
10.38	10.58	10.30	10.39	a=0.41	0	0	0	0	0	—	—
54.78	54.92	54.89	55.05	54.93	12.45	12.65	12.41	12.45	12.49	3.565	+ 0.033
87.45	87.48	87.61	87.81	87.59	21.70	21.80	21.62	21.63	21.69	3.558	+ 0.026
120.24	120.24	120.46	120.67	120.40	31.01	31.00	30.87	30.92	30.95	3.510	— 0.022
166.86	166.91	—	167.28	167.02	43.96	43.95	43.82	43.86	43.91	3.567	+ 0.035
121.01	121.06	121.05	121.17	121.07	31.47	31.35	31.27	31.26	31.34	3.499	— 0.033
88.16	88.18	88.32	88.22	88.22	22.22	22.20	22.07	22.04	22.13	3.516	— 0.016
55.52	55.68	55.54	55.50	55.56	12.97	12.95	12.77	12.76	12.86	3.511	— 0.021
10.58	10.71	10.39	10.33	10.50	0.32	0.20	0.08	0.03	0.16		
										3.532	

I numeri di queste tabelle sono per le quantità di elettricità i centimetri della scala e per le differenze di potenziale il prodotto dei centimetri della scala pel numero quattro: essi quindi corrispondono ad unità arbitrarie. Nel primo ciclo la differenza massima di potenziale fra le armature del condensatore fu circa ± 40 volt: nel secondo ± 60 volt. Io non conosco precisamente lo spessore delle lamine di mica del condensatore; ma, misurando il volume complessivo del condensatore stesso, e supponendo nullo quello delle armature metalliche, ho dedotto che esso è certamente inferiore a 13 centesimi di millimetro. Da ciò consegue che il massimo valore del campo elettrostatico in corrispondenza dei due cicli non fu inferiore a ± 10 e ± 15 rispettivamente unità elettrostatiche *cgs*. Questo limite è notevolmente superiore a quelli cui erano giunti gli sperimentatori che ho citato: del resto le mie ricerche si estesero fino ad una differenza di potenziale di ± 90 volt, cui corrispondeva un valore del campo uguale almeno a ± 25 unità elettrostatiche *cgs*; i risultati furono sempre analoghi a quelli raccolti e pubblicati in questa Nota.

La deviazione dalla proporzionalità, come apparisce dalle tabelle precedenti, non supera mai l'uno per cento: questa è la massima differenza fra i valori medi e i valori sperimentali tanto per le differenze di potenziale che per le quantità di elettricità; questa è anche la differenza fra i due valori medi della capacità nei due cicli. Tale differenza è dell'ordine della precisione delle misure. Le misure dirette all'elettrometro e le singole misure al galvanometro balistico fornivano una precisione più grande, non minore del 0,5 %: ma i numeri delle tabelle non si riferiscono alle osservazioni dirette: le differenze di potenziale, come si è detto, sono state dedotte dalla lettura di tre elongazioni successive: le quantità di elettricità sono la somma di più letture: quindi la precisione delle misure non può superare notevolmente il centesimo in valore relativo. Entro questi limiti appunto i nostri cicli si possono ritenere coincidenti con segmenti di rette uscenti dall'origine ed aventi la stessa direzione.

Questa conclusione condurrebbe ad ammettere che, almeno per la mica e nei limiti anzidetti, l'isteresi elettrostatica, nel senso che a questa parola si attribuisce nei fenomeni magnetici, non esista: ma le mie misure sono affette da un errore, il quale mi ha spinto ad imaginare un metodo più diretto conducente al medesimo scopo. La differenza di potenziale da me misurata non era quella esistente fra le armature al momento della scarica, ma quella esistente qualche tempo dopo (un minuto primo). Io non ho potuto eseguire esperienze con un tempo più breve a causa delle oscillazioni troppo debolmente smorzantesi dell'elettrometro. Così il fenomeno della scarica poteva essere complicato con quello della penetrazione dell'elettricità nel dielettrico. Quindi a rigore dalle esperienze finora enunciate può semplicemente dedursi la costanza del rapporto $\frac{V_{t+t_0}}{q_t}$, essendo t il momento della scarica,

t_0 il tempo passato fra questa e la lettura all'elettrometro. Ma io ho con altro metodo eseguito esperienze che davano direttamente il rapporto $\frac{V_t}{q_t}$, il quale è risultato anch' esso costante. Tali esperienze si riferiscono alla mica, alla paraffina, al vetro, all'ebanite.

Ne parlerò in una prossima Nota.

Fisica. — *Sulla diffusione dei raggi Röntgen.* 2ª Nota dei dott. R. Malagoli e C. Bonacini, presentata dal Socio Blaserna.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meteorologia. — *Sulla variazione annua della temperatura nel clima di Roma* (1). Nota II. del dott. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio Tacchini.

IV.

Per avere una idea del grado di fiducia che meritano i numeri calcolati (vedi Nota precedente) ho procurato di verificarli in diversi modi.

Ed in primo luogo ho considerato che gli errori probabili sono in ragione inversa della radice quadrata del peso, cioè del numero di osservazioni di cui si è preso la media.

Benchè le temperature di ogni stagione, e quella dell'anno non sieno esattamente le medie aritmetiche delle temperature dei mesi di cui si considerano composte, pure ho pensato che, se la legge degli errori accidentali fu applicata opportunamente, gli errori probabili di ogni stagione e quello della media annua, non dovevano molto differire dai quozienti delle medie aritmetiche degli errori probabili mensili divise per la radice quadrata del numero p di questi mesi.

Fatta questa verifica si trovano i risultati seguenti:

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Anno
Errori probabili . .	0,62	0,39	0,32	0,75	0,27
Quozienti, per $\sqrt{p}$, della media aritmetica degli errori mensili . .	0,60	0,43	0,32	0,67	0,24
Differenza	0,02	— 0,04	0,00	0,08	0,03

che verificano, con soddisfacente esattezza, la regola enunciata.

(1) Lavoro eseguito nell'Ufficio Centrale di Meteorologia.

In secondo luogo si osservi che avendo calcolato il numero più probabile di volte in che, per ogni secolo, si hanno scostamenti di grandezza determinata, se ne può dedurre, proporzionatamente, il numero più probabile di volte in cui quegli scostamenti si presentano in 40 anni.

Viene allora naturalmente l'idea di confrontare i numeri probabili così calcolati con quelli che effettivamente si riscontrano nella serie di 40 anni che fu presa a base di questo studio.

I risultati di questo confronto si trovano raccolti nel quadro seguente:

	0°,5		1°,0		1°,5		2°,0		2°,5		3°,0		3°,5		4°,0	
	C	O	C	O	C	O	C	O	C	O	C	O	C	O	C	O
Decembre			20	19	13	16	8	10	4	5	2	4	1	1	—	—
Gennaio*			22	22	15	16	9	9	5	5	3	2	1	0	—	—
Febbraio			20	22	12	15	7	7	4	5	1	0	—	—	—	—
Inverno	23	22	11	11	4	5	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—
Marzo			17	16	10	10	5	8	2	2	1	0	—	—	—	—
Aprile			10	11	3	1	1	0	—	—	—	—	—	—	—	—
Maggio			17	18	9	11	5	5	2	3	1	1	—	—	—	—
Primavera	15	14	4	5	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Giugno			13	13	6	5	2	2	1	1	0	1	—	—	—	—
Luglio			10	14	3	3	1	0	—	—	—	—	—	—	—	—
Agosto			11	13	4	3	1	0	—	—	—	—	—	—	—	—
Settembre			12	14	5	3	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—
Estate	12	13	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Ottobre			20	24	12	11	6	4	3	2	1	0	—	—	—	—
Novembre			18	18	11	11	5	4	3	2	1	2	—	—	—	—
Autunno	—	—	15	15	7	5	3	2	1	1	0	1	—	—	—	—
Anno	9	9	0	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Infine è da notarsi che, sia per le temperature estive, che per le invernali, si ebbero esattamente 20 scostamenti inferiori all'errore probabile, e 20 superiori, e che di questi ultimi 10 furono positivi e 10 negativi, talchè potremo dire che la legge dei grandi numeri è verificata oltre ogni aspettativa.

V.

La vera temperatura normale di una data epoca dell'anno, dovrebbe definirsi come *il limite della media aritmetica delle temperature osservate in una tale epoca, quando il numero degli anni di osservazione tende all'infinito.*

Quelle registrate nella Nota precedente non debbono quindi riguardarsi come le vere temperature normali di ogni mese, di ogni stagione, e dell'anno, ma come valori abbastanza vicini alle normali.

Avendo accertato che, nonostante la tendenza nelle temperature a perseverare in una stessa maniera di deviazioni per periodi più o meno lunghi, la legge dei minimi quadrati si trova avverata con sufficiente esattezza, ho voluto calcolare *gli errori probabili di quelle temperature che abbiamo considerato come normali.*

Indicando con ϱ l'errore probabile di ogni osservazione, con ϱ' l'errore probabile della media di p osservazioni, si ha, come è noto:

$$\varrho' = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \varrho \,. \tag{1}$$

Facendo uso di questa formula ho trovato i numeri seguenti:

Decembre	$\varrho' = 0°,16$	Marzo	$\varrho' = 0° 14$
Gennaio	$\varrho' = 0°,17$	Aprile	$\varrho' = 0°,09$
Febbraio	$\varrho' = 0°,16$	Maggio	$\varrho' = 0°,13$
Inverno	$\varrho' = 0°,10$	Primavera	$\varrho' = 0°,06$
Giugno	$\varrho' = 0°,11$	Ottobre	$\varrho' = 0°,15$
Luglio	$\varrho' = 0°,09$	Novembre	$\varrho' = 0°,15$
Agosto	$\varrho' = 0°,10$	Autunno	$\varrho' = 0°,12$
Settembre	$\varrho' = 0°,10$		
Estate	$\varrho' = 0°,05$	Anno	$\varrho' = 0°,04$

Questi errori non sono dunque mai superiori a due decimi di grado e sono minori nella Estate e nella Primavera che non nell'Inverno e nell'Autunno.

Dalla formula (1) si ricava

$$p = \frac{\varrho^2}{\varrho'^2} \,, \tag{2}$$

e questa serve a calcolare il numero di osservazioni che occorre fare perchè la media dei valori osservati abbia un errore probabile determinato.

Così, supposto che nella serie di anni considerata sieno in egual numero gli scostamenti positivi ed i negativi, per avere una media con scostamento probabile non superiore ad un decimo di grado, bastano 8 anni per la media dell'anno, ne occorrono 40 per quella dell'Inverno, 16 per la Primavera, 10 per l'Estate, e 56 per l'Autunno.

Un'ultima applicazione di quella formula serve a dare il valore degli errori probabili, e delle probabilità di determinati scostamenti nelle medie decadiche di temperatura. Riporto nel quadro seguente i valori così calcolati insieme coi valori normali di queste medie decadiche.

		Temperature normali decadiche	Errori probabili delle medie decadiche	Probabilità (in centesimi) di scostamenti superiori a						
				1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
	1	8,4								
Decembre	2	7,8	1,80		45	26	13	6	2	—
	3	7,3								
	1	6,6								
Gennaio .	2	6,5	1,91		48	29	15	7	3	1
	3	6,5								
	1	7,2								
Febbraio.	2	7,8	1,71		43	24	11	4	1	—
	3	9,1								
	1	9,3								
Marzo . .	2	10,3	1,48		37	18	7	2	—	—
	3	11,3								
	1	12,8								
Aprile . .	2	13,6	0,99	49	17	4	1	—	—	—
	3	15,0								
	1	16,4								
Maggio. .	2	17,8	1,47		36	17	6	2	—	—
	3	19,3								
	1	21,0								
Giugno. .	2	21,2	1,21		26	9	3	—	—	—
	3	23,0								
	1	24,2								
Luglio . .	2	25,1	1,03		19	5	1	—	—	—
	3	25,0								
	1	24,7								
Agosto . .	2	24,5	1,08		21	6	1	—	—	—
	3	23,6								
	1	22,5								
Settembre	2	21,3	1,14		24	8	2	—	—	—
	3	19,7								
	1	18,3								
Ottobre .	2	16,2	1,68		42	23	10	4	1	—
	3	14,6								
	1	12,7								
Novembre	2	11,7	1,59		40	20	9	3	1	—
	3	9,5								

Anche in questo quadro ho tralasciato di notare le probabilità di scostamenti superiori a numeri più piccoli dell' errore probabile.

VI.

Siccome questa Nota ha scopi principalmente pratici, e per gli studî della variazione della temperatura in rapporto ai fenomeni della vita vegetativa importa conoscere il grado di frequenza, non solo degli scostamenti

considerati nei loro valori assoluti, ma anche in riguardo al senso in cui questi avvengono, ho cercato se nel nostro clima, e nelle diverse stagioni, gli scostamenti, che in valore assoluto superano l' errore probabile, sono prevalentemente positivi o negativi.

In altri climi è stato da alcuni osservato [1] (ed anche ultimamente dal Grühn per lo Schleswig-Holstein, e la Danimarca) che gli inverni freddi discendono sotto la media temperatura invernale più di quanto sopra la medesima salgano gli inverni più miti, e che gli estati caldi hanno temperature più lontane dalla normale che non quelli freschi.

Nel nostro clima ho trovato che fra i 20 inverni le cui temperature si scostano dalla normale per valori maggiori dell' errore probabile, 11 furono troppo miti, e 9 troppo freddi; se poi ci limitiamo a considerare gli scostamenti maggiori in valore assoluto al doppio dell' errore probabile, ne troviamo 6 troppo miti e 3 troppo freddi; se infine esaminiamo gli scostamenti che sono superiori al triplo dell' errore probabile, ne troveremo due, e questi entrambi negativi.

Tolto quest' ultimo caso da cui, pel picciol numero di osservazioni, non si può dedurre alcuna regola certa, in tutti gli altri prevalgono gli inverni caldi; e poichè questo risultato non è conforme alle conclusioni ricavate per altri climi, ho voluto in qualche modo controllarlo esaminando le temperature dei singoli mesi che compongono l' inverno. Limitandomi agli scostamenti superiori a 2°, ne trovai 13 positivi e 13 negativi; e fra quelli superiori a 3°, ne trovai 3 positivi e 3 negativi.

Da tutto questo si può raccogliere che il nostro clima ha su molti altri il vantaggio di avere equamente distribuiti gli inverni eccessivamente freddi e quelli troppo miti, di modo che le temperature invernali eccessivamente fredde hanno medesima probabilità di quelle straordinariamente miti; e così quando si cerchi la probabilità di uno scostamento dato in valore ed in segno, o quando si cerchi il numero più probabile delle volte in che per ogni secolo si presenterà una temperatura più bassa o più alta di un limite dato, bisognerà prendere la metà del numero corrispondente nella tabella da noi calcolata, perchè ivi sono insieme sommati i casi di temperatura troppo elevata e quelli di temperatura troppo bassa, con eguali scostamenti dalla normale.

Simili sisultati si ottengono dall' esame delle temperature estive.

Sopra 20 scostamenti superiori all' errore probabile ne troviamo, in questa stagione, 10 positivi ed altrettanti negativi.

[1] Cfr. Dove, Abhandlungen der Königlichen Ak. d. Wissensch. zu Berlin, a. 1838; G. Celoria, *Sulle variazioni periodiche e non periodiche della temperatura nel clima di Milano.* Pubblicazioni del Reale Osservatorio di Brera, anno 1874.

Di quelli che superano il doppio dell'errore probabile, 4 sono positivi e 3 negativi; e dei due scostamenti che superano il triplo dell'errore probabile, uno è positivo ed uno negativo.

Se poi si prendono in esame gli scostamenti delle medie mensili nella stagione estiva si trova che, di questi, quelli che sono superiori ad 1°,5 sono otto volte positivi e sei volte negativi; e che quelli che superano i 2° sono tutti e tre negativi.

Deve dunque ritenersi che anche nell'Estate le temperature eccessivamente elevate abbiano medesima probabilità di quelle che sono di altrettanto troppo basse.

Meteorologia. — *Sulla relazione fra il carattere termico di una stagione e quello delle stagioni seguenti.* Nota del dott. Ettore Bortolotti presentata dal Socio Tacchini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Velocità di propagazione del terremoto di Pergamo (Asia M.) della notte 13-14 novembre 1895.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

Nella relazione da me pubblicata su questo avvenimento sismico (1), arrivai alla conclusione che l'ora più probabile che si doveva ritenere per l'epicentro era $11^h\,20\text{-}21^m$ p. (t. m. Cost.) I dati orarî, circa una trentina, riportati in quella mia relazione e ottenuti in varie località, ove il movimento fu più o meno risentito dall'uomo, sono talmente incerti e fra loro discordanti che non si può pensare sul serio di volerli utilizzare per fare un calcolo, per quanto approssimativo, della velocità con cui il movimento si propagò da un punto all'altro della regione scossa. Ciò è tanto più giustificato se si abbiano presenti simili tentativi, rimasti infruttuosi, ch'io intrapresi per due altri terremoti nell'Asia M., l'uno d'Aidin del 19 agosto 1895, l'altro d'Amed del 16 aprile 1896.

La circostanza però che il terremoto in questione giunse a perturbare il *microsismografo Vicentini* installato a Padova in Italia ed il *pendolo orizzontale* a registrazione fotografica installato a Nicolaiew in Russia, ci per-

(1) *Trembl. de terre de Pergama de la nuit 13-14 nov. 1895.* Bull. Mét. et Séism. de l'Observ. de Constantinople, pour l'an 1895. Partie sismique, pag. LVIII.

mette di tentare con qualche profitto il calcolo della velocità media di propagazione da Pergamo fino a queste due lontane località [1].

Riporto qui appresso le osservazioni fatte a Padova, le quali, conosciute con ritardo, non furono potute pubblicare nella mia relazione sopra citata, e che sono estratte dal *Boll. della Soc. sismologica italiana*, vol. I (1895), pag. 218.

PADOVA. $22^h\,31^m\,20^s$ (t. m. E. C.), principio di leggerissima perturbazione sismica. Consta di quattro gruppi d'oscillazioni, di ampiezze pressochè eguali, che hanno luogo ne' primi 4^m, dopo di che il movimento sismico diminuisce di ampiezza per terminare poi a $22^h\,35^m\,30^s$ (*R. Istituto fisico*).

Sappiamo che a NICOLAIEW la perturbazione principiò a $11^h\,36^m$ pom. (t. m. l.) e durò 14 minuti.

Riducendo al t. m. Cost. le ore di Padova e di Nicolaiew, relative al principio della perturbazione, e confrontandole con l'ora $11^h\,20\text{-}21^m$ (t. m. Cost.) già trovata per Pergamo, che si può ritenere come epicentro, ecco le velocità medie di propagazione superficiale che se ne ottengono:

Distanze da Pergamo	Località	Ore (t. m. Cost.)	Velocità in metri al secondo
Km. 0	Pergamo	$11^h\,20^m,5$	—
» 950	Nicolaiew	11 24, 0	4500 circa
» 1440	Padova	11 27, 3	3500 »

[1] Nella sera stessa si ebbe pure perturbazione nel pendolo orizzontale (sistema Milne) a registrazione fotografica che funziona a *Shide* (New Port nell'isola Wight in Inghilterra) come risulta dalla Nota del prof. Milne: *Observations with Milne's Pendulums T and U, 1895-96*, pubblicata nel First Report of the Committee per le sismologiche investigazioni (Brit. Assoc. for the Adv. of Sc., Liverpool, 1896). La perturbazione principiò a $8^h\,17^m\,7^s$ (t. m. Gr.), ciò che corrisponde a $10^h\,14^m\,3^s$ (t. m. Cost.); bisogna perciò concludere ch'essa non potè essere originata dalla 1ª grande scossa di Pergamo, che forma l'oggetto del presente studio, la quale avvenne più d'un'ora dopo e precisamente a $11^h\,20\text{-}21^m$ (t. m. Cost.). Siccome però il Milne dice che la perturbazione fu seguìta da 44 scossette, la cui durata totale sorpassò tre ore, così non sarebbe del tutto impossibile che qualcuna di esse fosse dovuta al terremoto di Pergamo. Ma, anche in quest'ipotesi, è chiaro non potersi affatto utilizzare le indicazioni di Shide, anzitutto perchè non sono riportate le ore esatte a cui avvennero le singole scossette, e poi perchè, essendo esse così numerose, sarebbe assai difficile sapere quali tra esse siano da ritenersi prodotte dal passaggio delle onde sismiche provenienti dall'Asia Minore. Oltre a ciò mi sembra poco probabile che sia potuta sfuggire al pendolo orizzontale di Shide la 1ª scossa di Pergamo delle $11^h\,20\text{-}21^m$ (t. m. Cost.), certamente la più importante, mentre lo stesso strumento avrebbe registrato qualcuna delle altre scosse, più o meno sensibili, che la seguirono.

Il terremoto di Pergamo dev'essere passato inosservato al pendolo orizzontale, pure a registrazione fotografica, installato a *Strasburgo*. Infatti nella lista delle perturbazioni sismiche, registrate da questo strumento dal 28 marzo fino al 1° dicembre 1895 (*Beiträge zur Geophysik ecc.* del prof. G. Gerland, vol. III, fasc. 1°, p. 204) non se ne trova alcuna nella notte dal 13 al 14 novembre.

Per quanto grande possa sembrare a prima vista la differenza tra queste due velocità, pure non bisogna farne le meraviglie se si consideri la poca fiducia che merita l'ora di Pergamo, la quale ha servito appunto di base al calcolo, e si pensi inoltre che un po' d'incertezza si trova nell'ora stessa di Nicolaiew, a causa della piccolissima velocità oraria colla quale si sposta la carta sensibile in quel registratore fotografico. Basta infatti riflettere che coll'aumentare d'un sol minuto l'ora di Nicolaiew, la velocità ad essa relativa si ridurrebbe quasi identica a quella di Padova! Oppure, volendo ritenere esatta l'ora di Nicolaiew, basterebbe ammettere che l'ora di Pergamo fosse troppo alta da 1 a 2 minuti, ciò che è tutt'altro che impossibile, per far diminuire e quasi sparire la differenza in questione, come si rileva dal seguente specchietto [1]:

	Ora all' epicentro		
	$11^h\,20^m,5$	$11^h\,19^m,5$	$11^h\,18^m,5$
Nicolaiew, velocità di m.	4500 circa	3500 circa	2900 circa
Padova, » »	3500 »	3100 »	2700 »

Per le precedenti considerazioni è a ritenere adunque che la velocità di circa 3500 metri al secondo, calcolata in base all'ora di Padova, sia la più attendibile e ch'essa non potrebbe differire molto da quella che si otterrebbe volendo far uso de' minimi quadrati per il calcolo di detta velocità, nel quale, però, l'ora di Padova dovrebbe naturalmente entrare con un peso ben superiore per rispetto a quella di Nicolaiew.

Mi piace di chiudere la presente Nota facendo riflettere che la velocità, trovata per questo terremoto, non si discosta molto da quella calcolata per le scosse di Zante del 1893 e per quella di Paramythia del 13-14 maggio 1895, e che si riferiscono al principio della perturbazione registrata dai più sensibili strumenti d'allora, situati a grandi distanze. Essa si approssima abbastanza a quelle calcolate per i terremoti d'Aidin del 19 agosto 1895 e d'Amed del 16 aprile 1896, a condizione tuttavia che per questi due terremoti si escludano le velocità, ottenute in base al principio della perturbazione riscontrata nel microsismografo Vicentini, installato a Padova, e la cui sensibilità sembra essere stata superiore a quella degli strumenti delle altre località.

[1] È anzi assai probabile che l'ora determinata a Pergamo sia realmente troppo alta, per il fatto ben noto che in occasione d'un fenomeno così imprevisto, quale è il terremoto, specie poi se d'una intensità straordinaria, l'ora letta sugli orologi si riferisce generalmente alla fine della scossa, come più distesamente ho scritto nel mio studio sulla velocità del terremoto d'Aidin del 19 agosto 1895. (Beiträge zur Geophysik ecc. del Prof. Dr. G. Gerland, III. Band. 3 Heft, s? 337, Leipzig, 1897).

Il fatto poi che pel terremoto di Pergamo non si è ottenuta, in base al principio della perturbazione prodotta nel microsismografo Vicentini di Padova, una velocità vicina ai dieci chilometri al secondo, come per l'appunto s'ebbe a trovare con lo stesso strumento per il terremoto d'Aidin e quello d'Amed testè ricordati, starebbe forse a provare che questa volta dovettero essere più affievolite le onde sismiche che giunsero dall'Asia M., sia perchè effettivamente fu meno intenso lo scuotimento all'ipocentro, sia perchè la profondità di quest'ultimo fu al confronto minore. Questo modo di vedere sarebbe in accordo col fatto che dei tre terremoti in questione, quello di Pergamo fu in realtà il meno importante, sia per la minore entità dei danni arrecati, sia per la distanza un po' meno considerevole a cui giunse il movimento del suolo resosi sensibile all'uomo. Ciò parrebbe anche confermato dalla circostanza che le indicazioni, ottenute a Padova pel terremoto di Pergamo, furono meno importanti in confronto degli altri due terremoti e che questa volta nulla fu registrato a Strasburgo, come apparisce dal seguente specchietto che non ha bisogno d'alcuna spiegazione:

Località e loro distanza approssimativa dall'epicentro	Terremoto d'Aidin 19 agosto 1895		Terremoto di Pergamo 13 novembre 1895		Terremoto d'Amed 16 aprile 1896	
	durata della perturbazione	ampiezza della perturbazione	durata della perturbazione	ampiezza della perturbazione	durata della perturbazione	ampiezza della perturbazione
Nicolaiew (km. 1000)	apparecchio smontato		14^m	$5\text{-}6^{mm}$	nulla	
Padova (1500) . .	17^m	4^{mm}	4	assai piccola	10^m	2^{mm}
Strasburgo (2000) .	16	5	nulla		piccolissima traccia	

Stando a questi dati, sembrerebbe che in ordine d'importanza venisse per primo il terremoto d'Aidin, poi quello d'Amed, infine quello di Pergamo, nonostante l'anomalia presentata da Nicolaiew, il cui pendolo orizzontale avrebbe registrato quest'ultimo terremoto e non quello alquanto più forte d'Amed (1).

Se si ammette, come parrebbe più probabile, che realmente la commozione di Pergamo sia stata meno violenta od abbia avuto un ipocentro meno profondo (2), e tanto meglio se si ammettono le due ipotesi nello stesso tempo, in modo che le onde sismiche generate siano state meno considerevoli, egli

(1) Quest'anomalia sarebbe subito spiegata se la sensibilità del pendolo di Nicolaiew fosse stata maggiore nell'ultimo terremoto.

(2) In questo caso, le onde sismiche essendo state generate in mezzo a strati più superficiali e dovendosi propagare lungo i medesimi, sarebbe subito spiegata la minor velocità del movimento a seconda delle idee già da me svolte nella Nota precedente dal titolo: *Influenza della diversa qualità e sensibilità degli strumenti sulla misura della velocità delle onde sismiche.* Boll. della Soc. Sism. Ital. vol. II (1896), p. 203.

è possibile che le prime onde — quelle dotate di maggior velocità — non abbiano potuto conservare a grande distanza tutta l'energia necessaria per potere agire sopra strumenti per quanto delicatissimi; ed inoltre che questi non siano stati perturbati che al sopraggiungere d'altri gruppi d'onde meno affievolite, è vero, ma dotate di minor velocità. Ciò potrebbe esser vero anche nel caso che le onde sismiche siano della stessa natura, per es. le longitudinali, in quanto che esse potrebbero arrivare ad una data località con diverso ritardo, secondo il vario percorso tenuto. Tanto meglio poi se si tratti di differenti specie d'onde che si propaghino per loro natura con diversa velocità; poichè in tal caso se per una commozione sismica sufficientemente intensa possono tutte agire fino ad una certa distanza, per una commozione di minor forza, alcune specie d'onde potrebbero forse arrivarvi ancora, ma così affievolite da essere incapaci d'influenzare gli stessi strumenti.

Siamo così in presenza d'un'altra causa di complicazione nello studio del meccanismo di propagazione delle onde sismiche; poichè il risultato a cui si giunge nel calcolo della loro velocità, oltre che dalla qualità e sensibilità degli strumenti, dalla loro maggiore o minore distanza dall'epicentro e dalla profondità del focolare sismico — come ho già avuto occasione di mostrare in altre mie Note precedenti — potrebbe dipendere anche dalla intensità stessa della commozione sismica.

Chimica. — *Soluzioni solide fra composti a catena aperta* [1]. Nota di GIUSEPPE BRUNI, presentata dal Socio GIACOMO CIAMICIAN.

Una lunga serie di ricerche venne eseguita in questo laboratorio per stabilire quali analogie di costituzione determinino fra due composti la formazione di soluzione solida, ed il conseguente comportamento crioscopico anormale, quando uno di questi venga sciolto nell'altro. Nonostante che diversi sperimentatori abbiano osservato alcuni casi di soluzione solida fra composti a catena aperta, tuttavia la quasi totalità delle anomalie osservate si verifica fra composti a catena chiusa, ed a questi esclusivamente si riferiscono le regole finora stabilite.

Ad esempio fra composti ciclici vale la regola, che se uno di essi venga sciolto in un altro che ne differenzi solo per due atomi d'idrogeno in più od in meno, ha luogo formazione di soluzione solida. Ciò si verifica fra composti di svariatissima costituzione chimica purchè a catena chiusa. P. es. diidronaftalina in naftalina, tetraidrodifenile in difenile, anidride maleica in anidride succinica. Passando a composti a catena aperta ciò non si verifica più. Soluzioni di acido oleico in acido stearico, di acido butirrico in acido

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

crotonico, hanno comportamento crioscopico normale. La spiegazione di questo fatto deve senza dubbio ricercarsi in ciò, che la formazione o la scissione di un doppio legame apporta in un composto a catena aperta un' alterazione della simmetria molecolare ben più grande, che in un composto a catena chiusa, e toglie quindi fra due composti che per tal modo differiscano la capacità di formare soluzione solida. Ciò venne posto in rilievo da Garelli (1).

Bisogna quindi, per trovare esempi di soluzioni solide fra composti a catena aperta, sperimentare su sostanze che abbiano la stessa configurazione molecolare. Küster (2) osservò infatti che la tricloroacetamide, e la tribromoacetamide che si trovano certamente in tali condizioni, formano fra di loro miscele isomorfe. Così pure secondo Rothmund (3) tetracloruro e tetrabromuro di carbonio formano soluzione solida. In tali condizioni di identica configurazione molecolare si trovano senza dubbio fra di loro: cloroformio, bromoformio, e jodoformio; e rispettivamente cloruro, bromuro e joduro d' etilene. Il bromoformio ed il bromuro d' etilene vennero introdotti come solventi in crioscopia rispettivamente da Ampola e Manuelli, e da Raoult. Era prevedibile che sciogliendo in essi i rispettivi composti clorurati e jodurati si avesse formazione di soluzione solida, e quindi anomalia di comportamento crioscopico. Era inoltre lecito il formulare ipotesi sulla misura relativa di tali anomalie. Infatti è noto che, quando si forma soluzione solida, la curva dei punti di congelamento tende ad accostarsi alla retta che unisce i punti di congelamento dei due componenti. Si poteva dunque prevedere che i composti clorurati, che hanno temperature di fusione assai più basse di quelle dei derivati bromurati, avrebbero presentata solo un' anomalia relativamente leggera; e che invece sarebbe stata fortissima quella presentata dai composti jodurati che fondono a temperatura assai più alta. Tali ipotesi vennero completamente verificate dall' esperienza.

I. *Determinazioni in bromoformio.*

Il bromoformio usato come solvente proveniva dalla ditta Kahlbaum; fu purificato lavandolo con acqua alcalina, seccandolo, e distillandolo a pressione ridotta. Si congelava a $+ 8^\circ,5$. Ampola e Manuelli indicano la temperatura $+ 7^\circ,8$.

Il cloroformio pur esso proveniente dalla ditta Kahlbaum, fu purificato collo stesso metodo. Bolliva a $60^\circ,5$ e 750^{mm}. Esso fu raccolto in palline tarate. Ecco i risultati di tre serie di determinazioni crioscopiche.

Per la costante tenni il valore: $k = 144$ trovato da Ampola e Manuelli (4).

(1) Gazz. chim. ital. 1894, II, 251.
(2) Zeitschr. für Phys. Chemie, VIII, 584.
(3) Zeitschr. für Phys. Chemie, XXIV, 705.
(4) Gazz. chim. ital. 1895, II, 91.

Concentrazioni	Abbass. termometrico	Peso molecolare ($k = 144$)
		$CH Cl_3 = 119.4$
0.1603	0°.16.5	140.0
0.3697	0°.38	140.1
0.6578	0°.67.5	140.3
1.3146	1°.32	140.2
2.4358	2°.45	146
3.9018	3°.78	149
0.1643	0°.16.75	141.2
0.4258	0°.43.75	140.2
0.1722	0°.17.5	141.4

Una serie di misure era pure stata eseguita da Ampola e Manuelli (loco citato) di cui riporto qui i risultati, calcolando i valori dei pesi molecolari dai loro dati.

Concentrazioni	Pesi molecolari
0.1156	119.0
0.4408	135.1
1.7928	136.7
3.0534	141.9
4.2092	144.9

Come si vede questi risultati concordano sufficientamente bene coi miei, eccetto il valore dato dalla prima concentrazione. Il comportamento crioscopico del cloroformio in bromoformio non è quindi normale, come i citati autori avevano creduto di dover concludere. L' anomalia non è fortissima, come del resto era prevedibile, ma è assai spiccata, ed è poi rimarchevolissima, nelle mie determinazioni, la costanza caratteristica dei valori dati dalle concentrazioni più basse.

Come dissi più sopra era prevedibile che assai più forte sarebbe stata l' anomalia presentata dal jodoformio.

Il jodoformio usato fu cristallizzato ripetutamente dall' alcool e fondeva a 119°. Ecco i risultati avuti in tre serie di misure:

Concentrazioni	Abbass. termometrico	Peso molecolare ($k = 144$)
		$CH J_3 = 394$
0.2214	0°. 5.25	607
0.4269	0°.10.25	600
0.5443	0°.35.5	603
0.8282	0°.19.75	604
1.4872	0°.35.5	603
1.7744	0°.42.5	601
3.4914	0°.82	613

L' anomalia è quindi fortissima, ed i valori ottenuti si possono ritenere costanti.

Per comprovare col massimo rigore la formazione di soluzione solida fra bromoformio e jodoformio, vennero eseguite due determinazioni quantitative col metodo solito. Come sostanza normale usai il difenile. Il comportamento normale del difenile risulta dalla seguente determinazione:

Concentrazioni	Abbass. termometrico	Peso molecolare ($k = 144$)
		$C_{12} H_{10} = 154$
0.4072	0°.39	151
1.1313	1°.05	155

Nelle determinazioni quantitative seguii il metodo già più volte descritto. La massa cristallina separata veniva liquefatta col semplice calore della mano, raccolta e pesata in vasetto a tappo smerigliato. Con essa si riempivano alcune palline pure accuratamente pesate. Per l' analisi di queste seguii il metodo indicato da Beckmann [1] in un caso analogo. Per ciascuna determinazione chiudevo cioè in tubi due di queste palline con un forte eccesso di potassa alcoolica. Chiuso il tubo, provocavo la rottura della pallina e scaldavo in stufa per due ore a 120°-130°. Nel contenuto di uno di questi tubi determinavo bromo e jodo assieme allo stato di sali d' argento; nell' altro il jodo allo stato di joduro di palladio. Dalla quantità di jodo, riferita a tutta la massa cristallina, avevo la quantità del jodoformio in essa contenuto.

Da quella di bromo calcolavo parimenti quella del bromoformio; e per differenza ottenevo quella del difenile.

Ecco i risultati analitici:

I^a esperienza. In gr. 32.81 di bromoformio vennero sciolti gr. 0,6178 di jodoformio, e gr. 0,4620 di difenile. La massa cristallina separata pesava gr. 8.3804.

Di essa: gr. 0.6654 fornirono gr. 1.4762 di $Ag Br + Ag J$
gr. 1.3859 fornirono gr. 0.0172 di $Pd J_2$.

II^a esperienza. In gr. 47.76 di bromoformio vennero sciolti gr. 0.8845 di jodoformio e gr. 0.5538 di difenile. La massa cristallina separata pesava gr. 8.8867.

Di essa: gr. 0.1381 fornirono gr. 0.3065 di $Ag Br + Ag J$
gr. 0.4834 fornirono gr. 0.0067 di $Pd J_2$.

Applicando a questi dati analitici il metodo di calcolo già indicato in miei precedenti lavori, si ha che la differenza tra il jodoformio esistente nella massa cristallina e quello corrispondente al difenile e quindi contenuto nell' acqua madre è fortissima (circa 5 centigrammi in entrambe le determina-

[1] Zeitschr. für Phys. Chemie, XXII, 612.

zioni), e tale quindi da non poter esser ascritta ad errori d' esperienza. Deve quindi concludersi che, nel congelamento delle soluzioni di jodoformio in bromoformio, si separa una soluzione solida.

I risultati di tali calcoli sono i seguenti:

			I.	II.
Soluzione liquida iniziale	Bromoformio	gr.	32.81	41.98
	Jodoformio	"	0.6178	0.8845
	Difenile	"	0.4620	0.5358
Suluzione liquida finale	Bromoformio	"	24.53	33.20
	Jodoformio	"	0.5409	0.7935
	Difenile	"	0.4185	0.5165
Acqua madre	Bromoformio	"	1.3071	1.2406
	Jodoformio	"	0.0288	0.0297
	Difenile	"	0.0223	0.0193
Soluzione solida	Bromoformio	"	6.9731	7.5358
	Jodoformio	"	0.0481	0.0613
Concentrazione iniziale della soluzione liquida		(C_o)	1.823	2.038
" finale " " "		(C_o)	2.122	2.368
" media " " "		(C_m)	1.972	2.203
" della soluzione solida		(C_s)	0.6851	0.8054
Coefficiente di ripartizione		$\left(\alpha = \frac{C_s}{C_m}\right)$	0.35	0.37

Si possono ora correggere i valori dei pesi molecolari ottenuti prima, colla nota formula di Beckmann [1], usando per α il valore 0.36 media dei due valori avuti dalle due determinazioni quantitative.

Come si vede dalla tabella seguente si ottengono dei valori quasi coincidenti col teorico.

Concentrazioni	Peso molecolare trovato m_t	Peso molecolare corretto $m = m_t(1 - \alpha)$
		$CH\,J_3 = 394$
0.2214	607	388
0.4269	600	384
0.5413	603	386
0.8282	604	387
1.4872	603	386
1.7744	601	385
3.4914	613	392

[1] Zeitschr. für Phys. Chemie, XXII, 612

II. *Determinazioni in bromuro d' etilene.*

I prodotti usati provenivano tutti dalla ditta Kahlbaum. Il bromuro ed il cloruro d' etilene vennero seccati su $Ca\,Cl_2$ e distillati. Il primo bolliva a 132°.5 e 767^{mm} e si congelava a + 10°.2, mentre i primi sperimentatori che lo usarono come solvente indicano temperature varianti fra + 8° e + 9°. Il cloruro bolliva ad 84° e 759^{mm}. Il joduro d' etilene polverizzato e seccato nel vuoto su $H_2\,SO_4$, si presentava in cristallini prismatici bianchi fondenti ad 83°. Esso restava lungamente inalterato anche alla luce viva, mentre per minime traccie di impurità, si decompone rapidamente colorandosi.

Vennero eseguite due serie di misure pel cloruro d' etilene, e tre serie pel joduro, di cui le tabelle seguenti mostrano i risultati:

Concentrazioni	Abbassamenti termometrici	Peso molecolare (K = 118)
	Cloruro d' etilene	$C_2\,H_4\,Cl_2 = 99$
0.3834	0°.36.5	124
0.6684	0°.65	121
0.9323	0°.86	128
1.6268	1°.49	129
2.0559	1°.88	129
4.3356	3°.88	132
	Joduro d' etilene	$C_2\,H_4\,J_2 = 280$
0.2781	0°.07.5	438
0.5800	0°.15.75	435
0.6375	0°.17.5	430
0.7655	0°.21	430
1.8023	0°.49	434
2.3929	0°.65	434
3.6424	0°.97	443

Il comportamento è spiccatamente anormale; anzi qui si osserva (specialmente pel joduro) il decrescere e quindi il risalire dei pesi molecolari; andamento che è assai frequente nelle anomalie dovute a formazione di soluzione solida.

Da questi dati risulta inoltre evidente il parallelismo previsto fra il comportamento crioscopico delle soluzioni di cloruro in bromuro d' etilene e quelle del cloroformio in bromoformio.

Tale parallelismo si verifica pure per le soluzioni dei composti jodurati.

Sarebbe ora assai facile l' immaginare altri gruppi di composti analoghi che presentassero fenomeni simili; ma questo non apparisce per ora necessario. Ciò che importava di far rilevare, e che risulta provato dalle presenti ricerche, è che anche fra composti a catena aperta, quando essi presentino la stessa configurazione molecolare, ha luogo la formazione di soluzione solida.

Petrografia. — *Di alcune rocce filoniane della valle di Scalve* [1]. Nota del dott. Giuseppe Vigo, presentata dal Socio Struever.

La presenza di rocce filoniane nella valle di Scalve [2] è resa manifesta ad ognuno, che percorra quella valle dai numerosi ciottoli di tali rocce, che si osservano sul fondo del Dezzo e dei torrentelli, che in esso mettono foce.

Spingendosi infatti nelle vallette tanto di destra, quanto di sinistra della valle principale, fatta eccezione forse della val Rossa, è facile trovare in posto queste rocce in filoni, assai numerosi, che non oltrepassano mai la potenza di qualche metro. Ed è certamente per questa loro debole potenza, che malgrado tutte le ricerche fatte non si osservò mai alcuna traccia di metamorfismo di contatto nelle rocce incassanti.

Quanto al periodo della loro intrusione si può affermare che esse sono posteriori o quanto meno contemporanee al trias superiore, perchè, se nelle vallette di destra noi li vediamo attraversare le arenarie rosse del permiano e del trias inferiore, in quelle di sinistra tagliano gli strati non solo del trias medio e gli scisti di Wengen, ma anche il calcare d' Esino; come si osserva p. es. alla Cima di Baione a sud del passo dei Campelli. Sono quindi della stessa età di quelle che pure in filoni furono osservate dal Cozzaglio [3] e studiate dalla sig.na dott. Rina Monti [4]. Ed in questo concordano anche quei geologi, che già si occuparono della valle di Scalve. Il Curioni nella sua carta geologica segna parecchi affioramenti di queste rocce, chiamandole dioriti tanto nel permiano e nel trias inferiore, quanto nel suo primo piano del trias superiore (piano a trachiceri). Cita [5] poi alcuni affioramenti nella val Paludina, nella quale abbiamo il Muschelkalk e gli scisti di Wengen. Anche il Varisco [6] nella sua Carta geologica della Provincia di Bergamo, nota un affioramento di tali rocce nella val Gaffiona (trias inferiore) e tre nelle vicinanze delle malghe d' Epolo (Wengen) dove pure vennero osservati dal prof. Tara-

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di Mineralogia dell' Università di Pavia.

(2) Per valle di Scalve intendo, d'accordo col Castelli (Boll. del Club Alp. It. vol. XXX, 1897 « La valle di Scalve »), la parte superiore della valle del Dezzo, a cominciare dalla valle di Gleno.

(3) A. Cozzaglio, *Note esplicative sopra alcuni rilievi geologici in Val Camonica.* Giorn. di Mineral. vol. V, 1894.

(4) R. Monti, *Studi petrografici sopra alcune rocce della Val Camonica.* Giorn. di Mineral. vol. V, 1894.

(5) Curioni, *Geologia,* parte I, pag. 171 e seg.; parte II, pag. 116. Hoepli, 1877.

(6) A. Varisco, *Carta geologica della Provincia di Bergamo.* Bergamo, 1881.

melli [1]. Il Gümbel [2] poi dà una dettagliata descrizione della roccia del passo di Zovetto, chiamandola mesodiorite [3].

Avendo a mia disposizione una ricca serie di campioni di queste rocce, ho creduto non senza interesse di eseguirne lo studio petrografico, onde stabilire la loro posizione nella classificazione litologica.

I campioni studiati provengono da numerosi filoni delle seguenti località: valle dei Busatti e val Gaffiona (permiano e trias inferiore); val Paludina; Costone di Zendola; Malghe d'Epolo (Muschelkalk e scisti di Wengen); Cima Baione (Calcare d'Esino). Inoltre esaminai anche campioni della stessa roccia studiata dal Gümbel, e la cui posizione precisa è sui fianchi del monte Campione, a nord del passo Campelli e ad est del passo di Zovetto (Muschelkalk).

Tutte queste rocce appartengono al gruppo delle *porfiriti dioritiche*, e precisamente quelle della val Gaffiona, val dei Busatti, delle Malghe d'Epolo, del Costone di Zendola, della val Paludina e del monte Campione appartengono alle porfiriti dioritiche propriamente dette; quelle della Cima Baione sono molto più ricche in elementi colorati e s'avvicinano al tipo *Vintlite* [4], che, come è noto, è un termine di passaggio alle rocce lamprofiriche.

Porfiriti dioritiche. — Le rocce di questo gruppo hanno un color grigio verdastro più o meno scuro. In generale la struttura è finamente granulare e assai compatta. La massa fondamentale predomina sempre sugli interclusi, rappresentati da pochi cristalli bianco-torbidi di feldispato, le cui dimensioni di rado oltrepassano i tre mm.; da numerosi cristallini di anfibolo nero-lucente e da qualche raro cristallo di quarzo e di biotite. Sparse nella roccia delle Malghe d'Epolo trovansi poi delle macchie più oscure, che non sono altro che segregazioni più basiche dello stesso magma dioritico. Notevoli inoltre sono i cumuletti di cristalli d'epidoto e le plaghette di ematite, specialmente nei campioni provenienti dal Costone di Zendola, nei quali alcuni interclusi di feldispato sono leggermente rosei. Non rari sono anche i cristallini di pirite.

Feldispato. — È l'elemento che caratterizza la struttura porfirica di queste rocce, appartenendo esso chiaramente a due periodi distinti di forma-

[1] T. Taramelli, *Alcune osservazioni stratigrafiche nei dintorni di Clusone e di Schilpario.* R. I. L., vol. XXIX, serie 2ª, 1896.

[2] Gümbel, *Geognostische Mittheilungen aus den Alpen*, VI. Monaco 1880.

[3] È bene notare, che nei sopracitati autori vi ha qualche inesattezza circa le località; p. es. il Gümbel, tratto forse in errore dalla carta del Curioni, confonde il monte Vaccio colla Cima Baione ed evidentemente il passo di Zovetto col passo di Campelli; infatti è quest'ultimo che è tagliato negli scisti di Wengen, mentre al vero passo di Zovetto affiora la dolomia cariata. Circa la vera posizione di questa roccia si veda più avanti.

[4] Rosenbusch, *Mikroskopische Physiographie der massigen Gesteine*, pag. 448. Stuttgart, 1896.

zione. Gli interclusi, poco numerosi, idiomorfi, in generale di piccole dimensioni (4 mm. al massimo), hanno forma tabulare, allungata, a contorni talora arrotondati e corrosi. Sono completamente alterati specialmente in sericite e in poco caolino, di rado in calcite. Causa l'alterazione non si può stabilire la natura di questo feldispato: solo posso dire che è un plagioclasio per la geminazione polisintetica, che in alcuni individui riesce ancora evidente. Contiene inclusioni di epidoto.

Anfibolo. — È assai abbondante sempre in cristallini prismatici, talora anche geminati, della lunghezza di tre mm. al massimo, e da questi grado grado si va sino ai minuti cristallini facenti parte della massa fondamentale, di modo che è impossibile stabilire per questo minerale due distinti periodi di formazione. È quasi totalmente alterato e suo principale prodotto è l'epidoto, che prende le forme di scaglie, di granuli, riunentisi talora in plaghette e in bastoncini, e non di rado assume disposizione raggiata; lo si trova anche alterato in clorite e in calcite, che occupa di solito il centro dei cristalli.

Soltanto nella roccia del passo Campelli si conserva ancora abbastanza fresco, e quivi appunto ho potuto fare con certezza parecchie misure dell'angolo d'estinzione sulla zona d'allungamento e trovai un valore massimo di $c : \mathfrak{c} = 20°$: si tratta dunque di orneblenda (1). Il pleocroismo è debole:

$\mathfrak{a}$ = verde giallognolo pallidissimo
$\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ = verde assai chiaro.

Frequentemente è accompagnato da masserelle di sostanza ferrifera opaca. In alcuni casi osservai che la parte centrale dei cristalli d'anfibolo è occupata da cristallini di biotite.

Quarzo. — Lo trovai soltanto nei campioni provenienti dalle Malghe d'Epolo, dal passo dei Campelli (2) e del Costone della Zendola, ma è piuttosto raro. I cristalli di solito arrotondati, raggiungono parecchi mm. di diametro. Contengono inclusioni di un minerale colorato e numerose inclusioni liquide a bolla mobile.

Non mancano poi cristalli di pirite, che conservano inalterata solo la parte centrale, e squamette di ematite.

Massa fondamentale. — Essa predomina sempre sugli interclusi. In ogni caso è completamente cristallina ed a grana più o meno fina a seconda delle località. Nei campioni provenienti dal Costone di Zendola essa è formata da cristallini di feldispato e di anfibolo, mentre in quelli provenienti dalle altre località al feldispato ed all'anfibolo s'aggiunge in maggior o minor quantità

(1) Levy et Lacroix, *Les minéraux des Roches*. Paris, 1888.

(2) Il Gümbel, op. cit., nella roccia del passo di Zovetto non riscontra il quarzo e parla di un minerale, ch'io non rinvenni nei miei campioni, che gli parrebbe augite, ma che non potè con certezza determinare per la piccolezza dei suoi cristalli non suscettibili di misure.

il quarzo. Il feldispato in ogni caso è abbastanza fresco e forma cristallini per lo più tozzi, listiformi, talora tabulari, geminati secondo la legge dell'albite, in qualche caso secondo quella di Karlsbad e più di rado secondo quella del periclino. Da moltissime misure dell' angolo d' estinzione in lamelle geminate secondo l'albite nella zona normale a (010) il massimo valore trovato è di 18°. Do anche la misura d' estinzione in due geminati doppî secondo il metodo di Michel Levy [1]:

I.	II.
— 7°	+ 11° ½
— 3°	+ 11°

Si deve perciò riferire il feldispato stesso ad un termine piuttosto acido dell'andesina. I prodotti di alterazione sono identici a quelli dei corrispondenti interclusi.

Talora si avverte un accenno alla struttura ofitica, perchè tra i cristalli idiomorfi di feldispato s' insinua a cuneo l'anfibolo. In qualche raro caso si osserva la struttura zonale, in cui il centro è costantemente più alterato della periferia.

L'anfibolo non è così frequente come nella forma di intercluso, però, a seconda delle sezioni è abbastanza abbondante in minuti cristallini e scagliette, talora fresche, talora alterate anche qui in epidoto e in clorite.

Il quarzo, allotriomorfo, occupa sotto forma di piccoli granuli di forma variabile gli interstizî lasciati dal feldispato e dall'anfibolo. Sparsi per la pasta fondamentale si vedono, raramente, cristallini di apatite e di zircone, frequenti granuli e plaghe di sostanza ferrifera opaca, e prodotti titaniferi (Leucoxeno).

Vintlite. — Nelle frane della Cima Baione, composte esclusivamente da blocchi di calcare d' Esino, si trovano molti frammenti di una roccia massiccia di colore verde oscuro, cosparsa di numerosissimi e piccoli cristalli di anfibolo e di epidoto e di alcuni interclusi di feldispato e di quarzo.

I pochi interclusi di feldispato hanno forme arrotondate e corrose, e sono completamente alterati in sericite, sì che non è possibile alcuna determinazione. L'anfibolo, che è orneblenda comune ($c : \mathfrak{c} = 22°$) e che appartiene anche qui ad un' unica generazione, si mostra nettamente idiomorfo e con abito prismatico. Alcuni dei suoi cristalli raggiungono la lunghezza di 4 mm. e la larghezza di 2. Ha color verde olivastro con pleocroismo marcato:

$\mathfrak{a}$ = giallo verdognolo pallido.
$\mathfrak{b}$ = verde chiaro.
$\mathfrak{c}$ = verde più intenso.

[1] M Levy, *Étude sur la détermination des Feldspaths.* Paris, 1894.

Talora il pleocroismo non è ben netto per l'alterazione incipiente, in clorite, del minerale.

La massa fondamentale, che forma per metà circa la roccia è sempre cristallina e si compone di feldispato, quarzo, e anfibolo. Causa il materiale disadatto non posso con sicurezza stabilire la natura del feldispato. Applicato in parecchi casi il metodo di Becke [1] trovai:

$$\varepsilon > \alpha' \qquad \varepsilon > \gamma'$$
$$\omega > \gamma' \qquad \omega > \alpha'$$

Il feldispato dunque ha in qualunque caso rifrazione nettamente inferiore a quella del quarzo; constatai anzi che è presso a poco uguale a quella del balsamo del Canadà: si dovrebbe quindi riferire questo feldispato all'albite. Con ciò concorderebbe il risultato di alcune misure dell'angolo d'estinzione nella zona normale a (010) in lamelle geminate secondo l'albite, in cui trovai un massimo di 16°. Ma troppo pochi casi mi fu dato esaminare per poter con certezza affermare questo risultato. Il quarzo e l'anfibolo sono pure assai abbondanti.

Le porfiriti della val di Scalve, per il loro modo di giacitura e per la loro composizione petrografica, sono dello stesso tipo di alcune fra quelle che si incontrano in molte altre località delle prealpi lombarde, nel Trentino e nel Tirolo. Confrontando il mio materiale colla ricca collezione di rocce filoniane esistente nel Gabinetto di Mineralogia dell' Università di Pavia, riscontrai, che le rocce delle Malghe d' Epolo, sia per gl' interclusi, che per la costituzione della massa fondamentale sono affini ad alcune di quelle della val Cobello, studiate dal dott. C. Riva [2]; ne differiscono solo per la maggior scarsità di interclusi di feldispato e di quarzo. Così la roccia del passo Campelli è assai vicina ad alcune di quelle del pendio settentrionale del Monte Enrico Magnolo, in val Malga, studiate dallo stesso mio collega [3]. Tutte le altre, eccetto quelle della Cima Baione, sono dello stesso tipo di quelle dei dintorni di Pescarzo, e dell' isola di s. Zenone, studiate dalla dott. R. Monti [4].

[1] F. Becke, *Ueber die Bestimmbarkeit der Gesteinsgemengtheile besonders der Plagioklase, auf Grund ihres Lichtbrechungsvermögens* (Sitzungsberichte der K. Akad. d. Wissenschaft. Wien, Band CII, 1893, pag. 358.

[2] C. Riva, *Le roccie paleovulcaniche del Gruppo dell' Adamello.* Memorie del R. I. L., vol. XVII, 1896.

[3] Opera citata.

[4] Op. citata.

Fisica-biologica. — *Azione dell' elettricità sopra la germinazione.* Nota I, di Giulio Tolomei, presentata dal Socio Blaserna.

È un fatto ormai fuori di discussione che l'elettricità esercita un' influenza notevole sopra lo sviluppo delle piante, ma non è stato ancora determinato su quale delle funzioni della vita vegetale tale influenza si manifesti. La quistione, come ben s' intende, è tutt' altro che facile a trattarsi e richiederà una serie di studî e di ricerche molto numerose prima di essere risoluta, se pure si giungerà mai a risolverla completamente.

Persuaso che non sarebbe stato possibile di potere arrivare a qualche conclusione sicura se non studiando minuziosamente i fenomeni presentati dai vegetali che si sviluppano, essendo assoggettati all' azione dell' elettricità, ho cercato di procedere nelle mie ricerche in modo da potere studiare separatamente ciascuna fase dello sviluppo, ed avere così dei risultati che, messi a confronto con quelli avuti nelle condizioni ordinarie, possano far vedere chiaramente quali sono le differenze dovute all' influenza dell' agente studiato. In questa Nota riferisco intorno ad alcuni risultati ottenuti studiando i fenomeni fisici che si producono in un seme che germoglia.

In altre esperienze fatte nel 1896 (1) avevo già notato che i semi posti a germogliare sotto l'azione della corrente elettrica aumentavano di peso più rapidamente degli altri, ma non mi ero occupato di seguire con esattezza tutte le fasi del fenomeno, avendo allora di mira di ricercare solamente se vi erano differenze nel modo di comportarsi dei semi soggetti o no all' azione della corrente. Riprese queste esperienze con un indirizzo diverso, ho cercato prima di tutto di vedere se la diminuzione che si riscontra nella durata del germogliamento dei semi assoggettati all' azione dell' elettricità si possa considerare come una conseguenza delle modificazioni, che può subire l' assorbimento dell' acqua per parte dei semi nelle nuove condizioni nelle quali sono posti.

A tale scopo mi sono servito di un apparecchio molto semplice, per mezzo del quale è possibile registrare graficamente l' andamento del fenomeno. Esso è costituito da un filo di paglia, della lunghezza di circa 20 cm., terminato ad un estremo in punta affilata e fissato, a circa un decimo della lunghezza totale dall'altro estremo, fra due assicelle di legno traversate da un asse metallico attorno al quale può girare liberamente. All' estremo più vicino all'asse di sospensione, cioè a quello non terminato in punta, è attaccato un filo al quale è sospeso un dischetto di vetro pesante un poco più del braccio più lungo della leva così formata, di modo che questa sta in equilibrio con il braccio più corto rivolto in basso.

(1) Malpighia, anno X, vol. X.

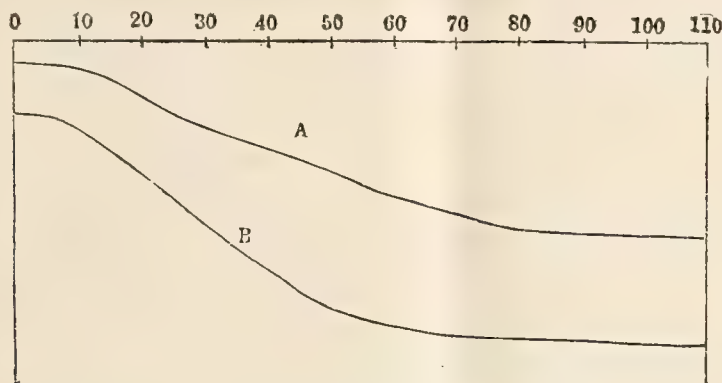
Il seme da studiare era fissato con della cera alla faccia inferiore del dischetto di vetro, era posto in un recipiente, costituito da un cilindro di vetro avente il fondo di rame argentato, e tenuto fermo da uno strato di sabbia sottile nel quale si trovava completamente immerso. Messa ogni cosa a posto, la punta del filo di paglia era appoggiata ad un cilintro registratore, facente un giro completo in una settimana circa, e nel recipiente di vetro era versata dell'acqua. Come si capisce facilmente, gonfiandosi il seme, il dischetto di vetro era sollevato ed il braccio più lungo della leva si abbassava tracciando una curva sopra la carta affumicata del cilindro.

L' esperienza veniva sempre fatta con due semi posti in due recipienti identici, ma dei quali l' uno era assoggettato all' azione dell' elettricità e l' altro no. I due recipienti erano situati ad una certa distanza l' uno dall' altro, separati da uno schermo metallico in comunicazione con la terra perchè non vi potesse essere il caso di fenomeni di induzione, ma le due pagliuzze si appoggiavano sopra lo stesso cilindro. Tagliando convenientemenie la carta potevano quindi essere confrontate le due curve ottenute e si poteva giudicare delle differenze se ve ne erano.

Uno dei recipienti era posto sopra un sostegno isolante ed era in comunicazione, per mezzo di un filo di rame, con uno dei poli di una macchina di Voss messa in azione da un motorino elettrico. In tal modo il recipiente si poteva caricare a volontà di elettricità positiva o negativa. L' altro recipiente si trovava nelle medesime condizioni del primo: solamente era mantenuto allo stato naturale. Le esperienze furono fatte con semi di fagiolo, di lupino, di fava e di granturco e diedero tutte risultati molto concordanti.

In una prima serie di esperienze il recipiente fu posto in comunicazione col polo negativo della macchina elettrica e fu elettrizzato durante un' ora ad intervalli di circa due ore ogni giorno, a cominciare dalle 7 fino alle 20, di modo che era complessivamente soggetto all' azione dell' elettricità durante cinque ore al giorno. In questo modo furono eseguite 18 esperienze, ed in 15, durante le quali il tempo si mantenne costantemente sereno, si ebbe una anticipazione notevole nella durata dell' assorbimento: in una non si gonfiò il seme mantenuto nelle condizioni normali, e quindi mancò il termine di confronto, ed in due, pure avendosi una diminuzione nella durata dell' assorbimento, questa non fu così rilevante come nelle altre. Durante queste due esperienze il cielo fu quasi sempre coperto e in una si ebbero due giornate di pioggia su cinque nelle quali si compì l' assorbimento.

Confrontando fra loro le curve ottenute sopra la carta affumicata del cilindro registratore, risultò che l' assorbimento dell'acqua per parte dei semi assoggettati all' azione dell' elettricità cominciò in 15 esperienze da 3 a 5 ore prima che in quelli mantenuti nelle condizioni normali, ed in due solamente 2 ore prima: per una non si può dir nulla non essendosi gonfiato il seme testimonio. Nella figura qui unita sono riportate, ridotte, le curve ottenute

in una delle esperienze fatte con dei semi di fava. La curva A rappresenta il modo col quale è proceduto l' assorbimento di un seme mantenuto nelle condizioni ordinarie e la B quello di un seme elettrizzato negativamente durante 5 ore del giorno, come è stato detto sopra. Come si vede l'aumento

di volume del seme mantenuto nelle condizioni ordinarie non si è cominciato a manifestare in modo sensibile che in capo a 12 ore, mentre per l'altro l'aumento di volume si è reso evidente solo dopo 8 ore. Dopo l'aumento di volume ha seguitato rapidamente per 57 ore per il seme mantenuto nelle condizioni ordinarie e per 51 per quello elettrizzato, e poi è andato diminuendo fino alla saturazione. I risultati ottenuti nelle altre esperienze fatte col cielo sereno furono analoghi a quelli avuti nell' esperienza cui si riferiscono le curve riportate sopra. Nelle due esperienze fatte col cielo annuvolato e con la pioggia le curve presentano differenze meno notevoli.

Le variazioni osservate nella durata dell'assorbimento non furono le stesse per tutte le specie studiate, ma presentarono delle differenze abbastanza rilevanti fra una specie e l'altra. Così mentre per i fagioli elettrizzati negativamente si ebbe la durata dell' assorbimento ridotta quasi della metà, per i lupini e per le fave la diminuzione fu molto minore. Probabilmente tale diminuzione dipende ancora dal valore della differenza di potenziale fra i semi e l'aria e dalla durata dell'elettrizzazione; e forse esistono dell' una e dell'altra grandezza, e per ciascuna specie di semi, valori tali per i quali si ha la massima diminuzione nella durata dell' assorbimento; ma io non mi sono occupato affatto di tali determinazioni essendomi prefisso, in queste prime ricerche, di determinare solamente sopra quali funzioni della vita vegetale l' elettricità esercita una influenza ed in che cosa tale influenza consista.

Le stesse esperienze furono ripetute ponendo uno dei recipienti in comunicazione col polo positivo della macchina elettrica ed elettrizzandolo durante 5 ore al giorno come era stato fatto nelle esperienze precedenti. Anche in questo caso le esperienze eseguite furono 18: in 14, con un cielo permanentemente sereno, si ebbe un ritardo notevole nella durata dell' assorbimento per parte dei semi elettrizzati; in due, col cielo quasi sempre coperto, non

si riscontrarono differenze apprezzabili, ed in altre due non si ebbero le curve perchè non si gonfiarono i semi.

Le curve ottenute dimostrano che l' assorbimento cominciò nei semi elettrizzati positivamente sempre dopo che era cominciato in quelli mantenuti nelle condizioni normali, e procedè nei primi più lentamente che nei secondi.

È necessario che faccia notare che i semi adoperati in ciascuna esperienza erano scelti accuratamente dello stesso peso; erano presi, quando era possibile, non solo dalla stessa pianta, ma dallo stesso baccello; erano esaminati con la lente per vedere se avevano l' epidermide intatta, giacchè una scalfittura, anche piccola, può produrre una variazione rilevante nella durata dell'assorbimento, ed erano poste nei due recipienti quantità perfettamente eguali di sabbia e di acqua, perchè i due semi sui quali sperimentavo volta per volta si trovassero in condizioni perfettamente eguali. Alcune ricerche preliminari dimostrarono che adoperando tali precauzioni, le curve che si ottenevano sopra il cilindro registratore, erano presso a poco identiche. È quindi fuor di dubbio che le differenze notate devono ascriversi esclusivamente all'azione dell' elettricità.

I risultati ottenuti dimostrano che *elettrizzando i semi negativamente si ha una diminuzione nella durata dell' assorbimento quando il cielo è sereno, ossia quando il potenziale dell' atmosfera è positivo, mentre elettrizzando i semi positivamente ha luogo il fenomeno contrario.*

Rimaneva da vedere se oltre che sopra il tempo durante il quale ha luogo l' assorbimento, l'essere i semi elettrizzati o nelle condizioni ordinarie influisce anche sopra la quantità d' acqua assorbita, o in altre parole se varia il potere assorbente dei semi, che è, come è noto, il peso d' acqua assorbito riferito a 100 parti di semenza secca.

In queste esperienze, per attenuare più che fosse possibile la causa di errore proveniente dall' esosmosi dei prodotti solubili, adoperai una quantità d' acqua poco superiore a quella che una ricerca preliminare aveva indicato potere essere assorbita dai semi della specie su cui sperimentavo. L' immersione fu prolungata fino a saturazione completa, e per impedire la germinazione e lo sviluppo di organismi estranei fu adoperata acqua cloroformizzata.

I semi erano scelti con le precauzioni alle quali ho accennato sopra ed erano posti nello stesso numero in due recipienti di vetro col fondo di rame argentato. Naturalmente avendo adoperato in ogni esperienza da 10 a 15 semi non li potevo prendere dallo stesso baccello.

Ponendo uno dei due recipienti in comunicazione col polo negativo di una macchina elettrica di Voss, messa in azione, come nelle esperienze precedenti, durante un' ora per 5 volte al giorno, ottenni i risultati raccolti nella seguente tabella nella quale con la lettera *a*) sono indicati i semi elettrizzati e con la *b*) quelli mantenuti nelle condizioni ordinarie.

	Peso iniziale in gr.	Peso massimo in gr.	Peso dell'acqua assorbita in gr.	Potere assorbente
1 a) 15 semi di lupino bianco	6,10	12,64	6,54	107,21
b) » » »	6,13	12,66	6,53	106,52
2 a) 15 semi di lupino bianco	6,78	13,65	7,17	105,76
b) » » »	6,66	13,78	7,12	106,90
3 a) 15 semi di fagiolo bianco	11,47	20,55	9,08	79,16
b) » » »	11,35	20,42	9,07	79,90
4 a) 15 semi di fagiolo bianco	11,78	21,02	9,24	78,43
b) » » »	11,86	21,07	9,21	77,65
5 a) 15 semi di granturco	4,56	6,97	2,41	52,85
b) » »	4,58	7,00	2,42	52,81
6 a) 15 semi di granturco	4,72	7,12	2,40	50,84
b) » »	6,68	7,21	2,52	52,35
7 a) 10 semi di fava	14,00	28,81	14,81	105,78
b) » »	14,07	29,22	15,15	107,67
8 a) 10 semi di fava	13.82	28,13	14,31	103,47
b) » »	13,77	27,92	14,15	102,75

Risultati analoghi furono ottenuti elettrizzando i semi positivamente, e quindi credo inutile riportarli. Come si vede *non vi sono differenze apprezzabili fra il potere assorbente dei semi elettrizzati e quello dei semi mantenuti nelle condizioni ordinarie.*

Le esperienze relative alla determinazione del tempo impiegato dai semi ad assorbire la massima quantità d' acqua che possono assorbire, furono ripetute assoggettando i semi all' azione della corrente indotta. Già fino dal 1867 il Blondeau, facendo agire la corrente indotta sopra i semi prima di porli nel terreno, aveva trovato che quelli elettrizzati nascevano sempre prima di quelli non elettrizzati: tali risultati furono confermati dallo Spechnew e da me [1].

Giova per altro notare, che in tali esperienze i semi prima erano fatti rigonfiare tenendoli immersi nell' acqua e poi erano assoggettati all' azione della corrente indotta e quindi seminati; per conseguenza l'azione della corrente si maifestava dopo che il rigonfiamento era già avvenuto, mentre in quelle che formano soggetto di questa Nota si trattava di determinare l' influenza che la corrente esercita sopra la rapidità dell' assorbimento.

L' apparecchio di cui mi servii fu lo stesso di quello adoperato nelle precedenti esperienze, con la sola differenza che al dischetto di vetro ne fu

[1] Malpighia, anno X, vol. X.

sostituito uno di rame argentato. Disposte le cose come nelle prime esperienze, ogni due ore erano posti il fondo del recipiente ed il dischetto in comunicazione coi due poli di un piccolo rocchetto di Ruhmkorff, capace di dare una scintilla di 1 mm., ed era fatta passare la corrente per 5 minuti. Le curve ottenute dimostrarono in modo evidente che il tempo in capo al quale comincia l'assorbimento e quello durante il quale si compie, diminuiscono per l'azione della corrente indotta, e tale diminuzione è molto più rilevante di quella ottenuta elettrizzando i semi per mezzo della macchina elettrica.

Aumentando il numero delle volte che la corrente era fatta passare ogni giorno e la durata del passaggio, le differenze si fecero sempre maggiori e divennero ancora più grandi adoperando un rocchetto capace di dare una scintilla di circa 1 cm. e poi uno capace di darne una di 3 cm. Anche in questo caso fu notata una differenza rilevante fra il modo di comportarsi delle diverse specie di semi. Così mentre coi fagioli e coi piselli si hanno già delle differenze notevoli adoperando un rocchetto capace di dare una scintilla di circa 1 mm., ed elettrizzando i semi per 5 minuti ogni due ore, non si hanno differenze apprezzabili con le fave e con i lupini. Invece tali differenze si manifestano se si fa passare più spesso la corrente, o si aumenta la durata di ciascun passaggio, e specialmente se si adoperano rocchetti più potenti.

Per altro, nonostante tali differenze nel modo di comportarsi dei semi delle diverse specie di piante, resta dimostrato che *anche la corrente indotta determina una diminuzione nel tempo necessario per raggiungere lo stato di saturazione.*

Anche per il caso della corrente indotta, determinai il potere assorbente delle diverse specie di semi, ma come nel caso precedente non trovai differenze apprezzabili, e quindi se ne può concludere che *la quantità d'acqua assorbita dai semi assoggettati all'azione della corrente indotta, è eguale a quella assorbita dai semi nelle condizioni ordinarie.*

Dopo l'azione della corrente indotta, studiai quella della corrente continua servendomi dello stesso apparecchio, ma adoperando invece del recipiente a fondo metallico, un recipiente di vetro, ed immergendo nella sabbia che serviva a tenere a posto il seme, due laminette di platino che potevano essere collegate coi due reofori di una pila. La corrente di cui mi servii fu quella fornita da un piccolo elemento Daniell e fu fatta passare durante tutto il tempo nel quale i semi seguitarono a gonfiare, cioè fino a tanto che non ebbero raggiunto lo stato di saturazione.

Anche in questo caso si ebbe una notevole diminuzione nella durata dell'assorbimento, e fu pure notato che tale diminuzione varia con le diverse specie di semi. Così è molto maggiore per i fagioli e per i piselli che per le fave ed i lupini. Molto probabilmente varierà anche con le costanti della

corrente adoperata, ma per ora non mi sono occupato di tale ricerca per le ragioni che ho detto sopra.

Determinata infine la quantità d' acqua assorbita dai semi mantenuti nelle condizioni ordinarie ed assoggettati all' azione della corrente, non trovai differenze apprezzabili neppure facendo variare le costanti della corrente adoperata fra limiti abbastanza lontani; e quindi se ne deve concludere che *la corrente elettrica non esercita alcuna influenza sopra il potere assorbente dei semi.*

Dalle ricerche che formano oggetto di questa Nota, risultò un fatto che mi sembra di non lieve importanza ed al quale credo utile di accennare.

Come è noto la penetrazione dell' acqua nell' interno dei semi avviene in modo molto variabile, non solo per le diverse specie di piante, ma ancora per i semi di una medesima specie e qualche volta per quelli di una stessa pianta. Di qui la ragione di tutte le precauzioni prese nella scelta dei semi che servirono per le esperienze descritte. Di più qualche volta si trovano dei semi che non si increspano affatto, cioè non assorbiscono la più piccola quantità di acqua.

Il Detmer escluse che il fenomeno fosse dovuto ad uno strato di cera inviluppante questi semi refrattari ed ammise che potesse dipendere da certe particolarità dell' integumento. Il Coupin [1], fatte delle sezioni nei semi di una stessa specie, dei quali taluni si erano gonfiati ed altri no, non potè riscontrare fra di essi nessuna differenza di struttura; solo notò che mentre nei semi gonfiati si vedono sempre fra le cellule dell' epidermide delle piccolissime fenditure disseminate a caso, nei semi non gonfiati neppure dopo una settimana d' immersione, tali fenditure non esistono affatto o sono in numero molto minore; e quindi emise la ipotesi che l' acqua potesse penetrare nell' interno dei semi per tali fenditure, pur ammettendo di non avere in tal modo risoluta la quistione. Ciò posto il fatto al quale alludevo sopra è il seguente. Se si prendono dei semi che non si sono increspati anche dopo un' immersione molto prolungata, si pongono nell' acqua e si fa passare in questa una corrente indotta, od una corrente continua, l'assorbimento comincia e seguita poi regolarmente come per tutti gli altri semi. Questo fatto si verifica non solo per quelle piante che non presentano che raramente dei semi refrattari all' assorbimento, come per es. il lupino bianco, ma ancora per quelle che li presentano comunemente, come il lupino giallo, e per quelle nelle quali sembra che i semi refrattari siano la regola come nel *Cytinus Laburnum.* L' intensità della corrente necessaria per raggiungere lo scopo, non è la stessa per tutte le specie, nè per tutti i semi di una medesima specie. In certi casi l'assorbimento si produce anche con la semplice elettrizzazione per mezzo della macchina elettrica.

[1] Ann. des Scien. Naturelles, VIII serie, vol. II, pag. 144.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 aprile 1898.

E. BELTRAMI Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Di una estensione del concetto di divisibilità per un polinomio* (¹). Nota del Corrispondente S. PINCHERLE.

1. Sia A un'operazione distributiva, che muta ogni serie di potenze intere positive della variabile x in una serie simile mediante le relazioni di definizione

$$A(x^n) = x^n(a_{n0} + a_{n1}x + \cdots + a_{n.p}\, x^p)\,, \qquad (1)$$
$$(n = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots\ldots).$$

Una serie di potenze

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n\, x^n$$

sarà trasformata, dall'operazione A, nella serie

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n-p.p}\, k_{n-p} + a_{n-p+1.p-1}\, k_{n-p+1} + \cdots + a_{n-1.1}\, k_{n-1} + a_{n.0} k_n) x^n, \qquad (2)$$

dove sono da porsi uguali a zero tutte le k con indice negativo.

2. È noto che dell'operazione A si può dare un'espressione analitica sotto forma di serie ordinata per le derivate successive $D^n\varphi$ della funzione arbitraria su cui si opera.

(¹) Un caso particolare della questione trattata nel presente lavoro ha formato l'oggetto di una Nota, letta nella R. Accademia delle Scienze di Bologna il 30 gennaio 1898, dal titolo: *Sul confronto delle singolarità delle funzioni analitiche.*

Indicando con ξ_n il secondo membro della (1), sarà [1]:

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\xi_n - nx\xi_{n-1} + \binom{n}{2} x^2 \xi_{n-2} - \cdots + (-1)^n x^n \xi_0 \right) D^n \varphi \, ;$$

ora, se si eseguisce l'operazione indicata tra parentesi sulle ξ_n, e si rappresenta con Δ la differenza finita rispetto all'indice n, l'espressione precedente si trasforma senza difficoltà in

$$(3) \qquad A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Delta^n (a_{00} + a_{01} x + \cdots + a_{0p} x^p) D^n \varphi \, .$$

Mentre le (1) definivano l'operazione A per le sole serie di potenze, la (3) vale a definirla per ogni funzione analitica φ che renda il secondo membro convergente in ugual grado entro un'area del piano della variabile x.

3. Indichiamo subito alcuni casi particolari dell'operazione A. Se i coefficienti $a_{n.0}, a_{n.1}, \ldots a_{n.p}$ si suppongono indipendenti dall'indice n, l'operazione $A(\varphi)$ si riduce alla moltiplicazione di una serie di potenze arbitraria φ per un polinomio di grado p.

Se i coefficienti $a_{n.0}, \ldots a_{n.p}$ sono polinomî razionali interi di grado s rispetto all'indice n, le loro differenze finite dall'ordine $s+1$ in avanti saranno nulle, e la (3) mostra che in tale ipotesi la $A(\varphi)$ si riduce ad una forma lineare differenziale d'ordine s, normale rispetto al punto $x=0$, cioè i cui integrali sono regolari nell'intorno di questo suo punto singolare.

4. Ammetteremo che i coefficienti a_{n0} ed a_{np} siano differenti da zero per ogni valore di n. Dalla prima di queste ipotesi risulta che se si cerca di soddisfare alla equazione $A(\varphi) = 0$ mediante una serie di potenze φ di x, tutti i cofficienti di questa serie sono nulli. L'operazione A non ha quindi radici nell'insieme (o spazio) delle serie di potenze.

5. Si indichino con B, B′ operazioni definite da

$$B(x^n) = h_n x^n \, , \quad B'(x^n) = h'_n x^n \, ,$$

l'operazione $BAB' = A_1$ avrà la medesima forma di A, cioè si avrà

$$A_1(x^n) = x^n (a'_{n0} + a'_{n1} x + \cdots + a'_{np} x^p) :$$

ora, le a_{n0} ed a_{np} essendo differenti da zero, si potrà disporre delle h_n ed h'_n in modo che a'_{n0} ed a'_{np} siano, per ogni valore di n, uguali all'unità. Mediante una simile trasformazione, possiamo quindi innanzi ammettere che sia

$$(1') \qquad A(x^n) = x^n (1 + a_{n1} x + a_{n2} x^2 + \cdots + x^p) \, .$$

[1] V. *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif.* Math. Annalen, Bd. XLIX, §§ 56 e 63.

Faremo infine l' ipotesi che le a_{n1}, a_{n2}, ... $a_{n.p-1}$ abbiano limiti finiti per $n=\infty$; siano questi rispettivamente a_1, a_2, ... a_{p-1}. Ci sarà necessario di considerare l' equazione algebrica

$$1+a_1 y+a_2 y^2+\cdots y^p=0\,, \tag{4}$$

e siano z_1, z_2, ... z_n le sue radici, con

$$|z_1|\geq|z_2|\geq\cdots\geq|z_n|\,.$$

6. Fin qui, non si è fatta nessuna ipotesi relativamente alla convergenza della serie φ cui si intendeva applicata l' operazione A. D'ora in avanti, considereremo quelle serie φ che convergono entro un cerchio di centro $x=0$ e di raggio superiore a $|z_1|$; diremo S l' insieme (spazio lineare) di tali serie, ed ogni tale serie sarà un *elemento* o *punto* di S.

Considerando la $A(\varphi)$, data dalla (2), segue immediatamente (dall' ipotesi che le $a_{n.i}$ hanno limiti finiti per $n=\infty$) che $A(\varphi)$ è una serie di potenze appartenente allo spazio S. Dico però che essa non è una serie arbitraria di questo spazio. Infatti, si ha

$$A(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$$

con

$$g_n=k_{n-p}+a_{n-p+1.p-1}\,k_{n-p+1}+\cdots+a_{n-1.1}\,k_{n-1}+k_n\,; \tag{5}$$

se ora determiniamo una successione di numeri q_n mediante l' equazione ricorrente

$$q_n+a_{n.1}\,q_{n+1}+a_{n.2}\,q_{n+2}+\cdots+q_{n+p}=0\,, \quad (n=0\,,1\,,2\,,.....)\,, \tag{6}$$

si scorge facilmente che la serie $\sum g_n q_n$ è assolutamente convergente e che il suo valore è zero. Infatti, la (6) è una equazione lineare alle differenze che ammette come equazione caratteristica la (4); onde per un noto teorema del Poincaré risulta che

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{q_{n+1}}{q_n}\right|=|z_i|\,, \tag{7}$$

ed, in generale, precisamente $|z_1|$.

Ora, per essere $A(\varphi)$ un elemento dello spazio S, indicando con r il raggio del cerchio di convergenza di $A(\varphi)$ e con r', r'' due numeri positivi tale che sia

$$r>r'>r''>|z_1|\,,$$

si avrà, M essendo un numero positivo finito:

$$|g_n| < \frac{M}{r'^n} ;$$

per la (7), da un valore N dell'indice n in avanti, si avrà pure, M' essendo anche un numero positivo finito:

$$|q_n| < M' r''^n ,$$

onde la serie $\sum |g_n q_n|$ è convergente, e quindi la $\sum g_n q_n$ è assolutamente convergente. Ma ponendo per le g_n la loro espressione (5), viene immediatamente in forza delle (6) che il valore di $\sum g_n q_n$ è zero.

7. Indichiamo con $Q_1(n)$, $Q_2(n)$, ... $Q_p(n)$ un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione (6). Si ha, c_1, c_2, ... c_n essendo costanti arbitrarie.

$$q_n = c_1 Q_1(n) + c_2 Q_2(n) + \cdots + c_p Q_p(n) ;$$

ciò significa che la relazione

$$\sum g_n q_n = 0 ,$$

equivale alle p relazioni

$$(8) \qquad \sum g_n Q_1(n) = 0 , \quad \sum g_n Q_n(n) = 0 , \ldots , \quad \sum g_n Q_p(n) = 0 .$$

In altri termini, la serie $A(\varphi) = \sum g_n x^n$ non è un elemento di S arbitrario, ma appartiene allo spazio lineare $S^{(p-1)}$, contenuto in S, delle serie i cui coefficienti soddisfano alle p relazioni indipendenti (8).

8. In alcune Note recenti, sono stato condotto a distinguere nelle operazioni distributive due diversi generi di degenerescenza [1]. Si può dire *degenere di primo genere* in uno spazio S ad infinite dimensioni un'operazione che ha radici fra gli elementi di S; *degenere di secondo genere* nello stesso spazio un'operazione che fa corrispondere agli elementi di S quelli di uno spazio S_1 contenuto in S ma non identico con S. Questi due generi di degenerescenza si presentano sempre insieme quando S si riduce ad un numero finito di dimensioni, caso in cui l'operazione distributiva diviene una omografia ordinaria. Riassumendo allora il risultato del § 4 e quello del § precedente, possiamo dire che:

L'operazione A *definita dalle* (1') *non ammette degenerescenza di primo genere, ma ammette sempre degenerescenza di secondo genere.*

Chiamando *piano* di S l'insieme delle funzioni $\sum g_n x^n$ di S che soddisfano ad una relazione $\sum g_n p_n = 0$, la $A(\varphi)$ appartiene ad un tempo a p

[1] V. *Appunti di calcolo funzionale distributivo,* § 10, nei Rendiconti del R. Istituto lombardo, S. II, T. XXX, 1897; *Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni* (nota a pie' della penultima pagina) nei Rendiconti della R. Accad. di Bologna, 30 gennaio 1898; *Sull'operazione aggiunta,* ibid., 17 aprile 1898.

piani, ossia, secondo la notazione usata nella Nota: *Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni*, ad un $S^{(p-1)}$ di punti o $\sum_{p+1}$ di piani. La degenerescenza di secondo genere di A è quindi della $p-1^{\text{sima}}$ specie.

9. Occupiamoci ora dell' operazione A^{-1} inversa di A. Poichè A non ha radici nella classe delle serie di potenze, la A^{-1} sarà, in questo spazio, a determinazione unica e la sua determinazione si avrà quando si abbiano le espressioni delle $A^{-1}(x^m)$ per ogni numero m intero positivo. A questo effetto, si ponga

$$A^{-1}(x^m) = (b_{m.m} + b_{m.m+1}\, x + \cdots + b_{m.m+\nu}\, x^\nu + \cdots)\, x^m ;$$

facendo $AA^{-1}(x^m) = x^m$ ed applicando le (1'), se ne dedurrà per la determinazione delle $b_{m.m+\nu}$, il sistema di relazioni

$$(9) \qquad \begin{cases} b_{m.m} = 1 \\ b_{m.m+1} + b_{m.m}\, a_{m.1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{m.m+\nu} + b_{m.m+\nu-1}\, a_{m+\nu-1.1} + \cdots + b_{m.m+\nu-p} = 0 . \end{cases}$$

Da queste si conclude che le $b_{m.\nu}$ sono integrali dell' equazione ricorrente

$$(10) \quad K(\nu) + a_{\nu-1.1}\, K(\nu-1) + \cdots + a_{\nu-p+1.p-1}\, K(\nu-p+1) + K(\nu-p) = 0,$$

colle condizioni iniziali

$$(11) \qquad b_{m.m} = 1 , \quad b_{m.m-1} = 0 , \quad b_{m.m-2} = 0 , \ldots b_{m.m-p} = 0 .$$

L' equazione (10) è quella che si dice *inversa* od *aggiunta* della (6); è noto [1] che ad un suo sistema fondamentale $K_1(\nu), K_2(\nu), \ldots K_p(\nu)$, corrisponde un sistema fondamentale della (6) dato dagli elementi reciproci della prima linea nel determinante

$$\begin{vmatrix} K_1(\nu) & K_2(\nu) & \ldots K_p(\nu) \\ K_1(\nu-1) & K_2(\nu-1) & \ldots K_p(\nu-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K_1(\nu-p+1) & K_2(\nu-p+1) & \ldots K_p(\nu-p+1) \end{vmatrix}$$

divisi per il determinante stesso.

10. I coefficienti $b_{m.\nu}$ delle $A^{-1}(x^m)$ si possono esprimere in funzione lineare omogenea del sistema fondamentale $K_1(\nu), K_2(\nu), \ldots K_p(\nu)$; potremo cioè scrivere

$$b_{m.\nu} = c_1(m)\, K_1(\nu) + c_2(m)\, K_2(\nu) + \cdots + c_p(m)\, K_p(\nu) .$$

[1] V. Bortolotti: *La forma aggiunta di una forma lineare alle differenze*, in questi Rendiconti, Serie 5ª, T. V, 1896.

Ma le condizioni (11) danno

$$\begin{cases} c_1(m)\,K_1(m) + c_2(m)\,K_2(m) + \cdots + c_p(m)\,K_p(m) = 1 \\ c_1(m)\,K_1(m-1) + c_2(m)\,K_2(m-1) + \cdots + c_p(m)\,K_p(m-1) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1(m)\,K_1(m-p+1) + c_2(m)\,K_2(m-p+1) + \cdots + c_p(m)\,K_p(m-p+1) = 0\,, \end{cases}$$

da cui segue, per la proposizione richiamata, che $c_1(m)\,,\, c_2(m)\,,\ldots c_p(m)$ costituiranno un sistema fondamentale dell' equazione (6). Abbiamo in tal modo ottenuta l' espressione delle $A^{-1}(x^m)$ sotto la forma

$$(12)\quad A^{-1}(x_m) = \sum_{i=1}^{p} c_i(m)\,(K_i(m)x^m + K_i(m+1)x^{m+1} + K_i(m+2)x^{m+2} + \cdots).$$

In quanto alla convergenza di questo sviluppo, si osservi che l' equazione caratteristica della (10) è la reciproca della (4), cioè

$$y^p + a_1 y^{p-1} + \cdots a_{p-1}\,y + 1 = \left(y - \frac{1}{z_1}\right)\left(y - \frac{1}{z_2}\right)\cdots\left(y - \frac{1}{z_p}\right) = 0\,;$$

ora $K_i(\nu)$ essendo integrale della (10), si avrà per il citato teorema di Poincaré:

$$(13)\qquad \lim_{\nu=\infty}\left|\frac{K_i(\nu+1)}{K_i(\nu)}\right| \leq \frac{1}{|z_p|}\,,$$

talchè lo sviluppo (12) converge almeno entro il cerchio di centro $x = 0$ e di raggio $|z_p|$.

11. Ottenute così le $A^{-1}(x^m)$, sarà facile di avere il risultato dell' operazione A^{-1} applicata ad un elemento qualunque $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$ dello spazio S. Sia r il raggio del cerchio di convergenza di φ con $r > |z_1|$. Si avrà

$$(14)\qquad A^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^{p}\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} g_n\, c_i(n)\, K_i(n+\nu)\, x^{n+\nu}$$

ossia

$$A^{-1}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n\, x^n$$

con

$$k_n = \sum_{i=1}^{p} (g_0\, c_i(0) + g_1\, c_i(1) + \cdots + g_n\, c_i(n))\, K_i(n)\,.$$

Qui si può anche porre

$$C_n(\nu) = \sum_{i=1}^{p} c_i(\nu)\, K_i(n)\,,$$

e si ottiene

$$k_n = g_0\, C_n(0) + g_1\, C_n(1) + \cdots + g_n\, C_n(n)\,. \tag{15}$$

In quanto alla convergenza dello sviluppo trovato, osserviamo che, per la (14), essa avrà certamente luogo nel campo comune di convergenza delle due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |g_n\, c_i(n)\, x^n|\,, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |K_i(\nu)\, x^\nu|\,,$$

nel cui prodotto sono compresi i moduli dei termini della serie (14). Ora la seconda di queste serie converge, come si è detto, per $|x| < |z_p|$; la prima converge almeno entro il cerchio di centro $x = 0$ e di raggio 1, per essere la $\sum g_n\, c_i(n)$ assolutamente convergente, come si è dimostrato al § 6. Ma dalla forma dell' equazione (4), segue $|z_p| \leq 1$, onde la serie (14) converge almeno entro il cerchio di centro $x = 0$ e di raggio $|z_p|$.

12. Da quanto precede si conclude che mentre φ è un elemento di S, $A^{-1}(\varphi)$ non appartiene generalmente ad S ma converge in un cerchio di raggio $|z_p|$ generalmente inferiore a $|z_1|$. Ciò è analogo a quanto accade nel caso della divisione di φ per il polinomio $(x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_p)$, operazione che rientra come caso particolare in quella qui studiata. Ma sotto le condizioni necessarie e sufficienti $\varphi(z_1) = \varphi(z_2) = \cdots = \varphi(z_p) = 0$, il quoziente di φ per il dato polinomio appartiene ad S. Vogliamo cercare quali sono, nel caso dell' operazione generale A, le condizioni perchè la $A^{-1}(\varphi)$ appartenga ad S, o, in altre parole, in quali funzioni φ di S l' esecuzione dell' operazione A^{-1} non produce singolarità. Queste condizioni, che si riducono a quelle della divisibilità nel caso che la A sia la moltiplicazione per un polinomio, sono espresse dal seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l' operazione A^{-1}, *eseguita su una funzione* φ *di* S, *produca una funzione di* S, *è che* φ *appartenga al* $S^{(p-1)}$ *di* S *definito dalle* p *condizioni* (8).

13. Che la condizione sia necessaria è subito visto; infatti se $A^{-1}(\varphi) = \psi$ deve appartenere ad S, $A(\psi) = \varphi$ apparterrà al $S^{(p-1)}$ in forza dei §§ 6 e 7. Essendo poi le $c_1(n), c_2(n), \ldots c_p(n)$ un sistema fondamentale della (6) al pari delle $Q_1(n), Q_2(n), \ldots Q_p(n)$, le condizioni (8) si possono anche scrivere:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu\, c_i(\nu) = 0\,, \quad (i = 1, 2, \ldots p)\,. \tag{16}$$

14. Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente. Ricordando che

$$C_n(\nu) = \sum_{i=1}^{p} c_i(\nu)\, K_i(n)\,,$$

deduciamo dalle (16):

$$k_n = -\sum_{\nu=n+1}^{\infty} g_\nu \, C_n(\nu). \tag{17}$$

Ma le $c_i(\nu)$ o le $K_i(\nu)$ sono rispettivamente (§ 9) un sistema fondamentale di integrali della (6) ed il sistema fondamentale corrispondente dell'equazione aggiunta (10); come tali, essi sono legati dalle relazioni [1]

$$\sum_{i=1}^{p} c_i(n+q) \, K_i(n) = \begin{cases} 0 \text{ per } q = 1, 2, \dots p-2, \\ 1 \text{ per } q = p-1; \end{cases} \tag{18}$$

ne viene che $C_n(\nu)$ è un integrale della (6) determinato dalle condizioni iniziali

$$C_n(n+1) = C_n(n+2) = \cdots = C_n(n+p-2) = 0, \; C_n(n+p-1) = 1, \tag{19}$$

onde

$$C_n(n+p) = -a_{n.p-1}, \; C_n(n+p+1) = -a_{n.p-1} \, C(n+p) - a_{n+1.p-2}, \dots$$

Ora, essendo a_i il limite di $a_{n.i}$ per $n = \infty$, ed indicando con b_i un numero tale che sia $|b_i| > |a_i|$ $(i = 1, 2, \dots p-1)$, potremo prendere l'indice n tale che per esso e tutti i successivi sia

$$|a_{n+\nu.i}| < |b_i|;$$

potremo inoltre scegliere i numeri b_i in modo che le radici di

$$1 + b_1 y + b_2 y^2 + \cdots + b_{p-1} y^{p-1} + y^p = 0$$

abbiano i loro moduli non maggiori di un numero positivo v tale che sia

$$r > r' > v \geq |z_1|.$$

Dalle (19), (19′), risulterà allora, M'' essendo un numero positivo fisso:

$$|C_n(n+\nu| < M'' \, v^{\nu-p+1},$$

onde la (17), notando che per le (18) i suoi primi $p-2$ termini sono nulli, darà

$$|k_n| < M''(|g_{n+p-1}| + |g_{n+p}| \, v + |g_{n+p+1}| \, v^2 + \cdots)$$

e poichè si ha

$$|g_n| < \frac{M}{r'^n},$$

viene

$$|k_n| < \frac{M \, M''}{r'^{n+p-1}} \left(1 + \frac{v}{r'} + \frac{v^2}{r'^2} + \cdots \right),$$

[1] Bortolotti, loc. cit., § 8.

la quale prova che $A^{-1}(\varphi) = \sum k_n x^n$ converge nel cerchio di raggio r, c. d. d.

15. Quando la funzione φ di S non appartiene allo spazio $S^{(p-1)}$ definito dalle (8), l'operazione A^{-1} produce dunque su essa singolarità entro il cerchio $|z_1|$. Queste singolarità sono però di tal natura che prese $p+1$ funzioni di S,

$$\varphi_h = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{h\nu} x^\nu , \quad (h = 1 , 2 , \ldots p+1) ,$$

e posto $A^{-1}(\varphi) = \psi_h$, vi è una combinazione lineare delle ψ_h priva di singolarità entro $|z_1|$; essa sarà la $l_1 \psi_1 + l_2 \psi_2 + \cdots + l_{p+1} \psi_{p+1}$, quando si determinino le l_i mediante le relazioni

$$l_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{1\nu} c_i(\nu) + l_2 \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{2\nu} c_i(\nu) + \cdots + l_{p+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{p+1.\nu} c_i(\nu) = 0 ,$$

$$(i = 1 , 2 , \ldots p).$$

Non sarebbe difficile dimostrare, reciprocamente, che se è dato un sistema $\bar{S}$ di serie di potenze convergenti nel cerchio di raggio z, ma tali che prese p qualunque di esse, una combinazione lineare di queste p converge oltre il detto cerchio, questo sistema $\bar{S}$ è ottenuto dall'insieme delle serie convergenti oltre z mediante l'applicazione dell'operazione inversa di una A quale è stata definita in questo lavoro.

16. Riassumendo, il risultato della presente Nota è il seguente:

Definita l'operazione A *dalle relazioni*

$$A(x^n) = x^n(1 + a_{n.1} x + \cdots a_{n.p-1} x^{p-1} + x^p) ,$$

con $\lim_{n=0} a_{n.i} = a_i$ *e* ζ *il massimo modulo delle radici di* $1 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_{p-1} y^{p-1} + y^p = 0$; *detto poi* S *l'insieme delle serie di potenze di* x *convergenti in un cerchio di raggio superiore a* ζ, *l'operazione* A^{-1}, *applicata alle serie di* S, *produce funzioni aventi in generale singolarità entro il cerchio* ζ. *L'operazione* A^{-1} *produce funzioni prive di singolarità entro quel cerchio se, e soltanto se la serie di* S, $\sum g_n x^n$, *cui essa si applica, è tale che*

$$\sum g_n C(n) = 0 ,$$

essendo $C(n)$ *l'integrale generale dell'equazione lineare alle differenze finite:*

$$C(n) + a_{n.1} C(n+1) + \cdots + a_{n.p-1} C(n+p-1) + C(n+p) = 0.$$

Come si è già avvertito, la condizione qui espressa ricade su quella di divisibilità per $1 + a_1 x + \cdots a_{p-1} x^{p-1} + x_p$ quando è $a_{n.i}$ indipendente da $n_1(a_{n.i} = a_i)$. Quando le $a_{n.i}$ sono funzioni razionali di n, il teorema qui enunciato fornisce proprietà delle equazioni differenziali lineari, che il lettore può facilmente sviluppare.

Matematica. — *Sulla risoluzione approssimata delle equazioni alle differenze.* Nota del Corrispondente S. PINCHERLE.

Matematica. — *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul determinante wronskiano.* Nota di G. VIVANTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

È noto da tempo il seguente teorema:

Se n funzioni reali $y_1, y_2, \dots, y_n$ d'una variabile reale x sono legate da una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e non tutti nulli, il loro wronskiano è identicamente nullo; e reciprocamente, se il wronskiano di n funzioni è identicamente nullo, esse sono legate da una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e non tutti nulli.

La prima parte del teorema è quasi evidente. Sulla seconda il prof. Peano sino dal 1889 (*Sur le déterminant wronskien*, Mathésis, t. IX, p. 75-76; *Sur les wronskiens*, ivi p. 110-112) ha emesso qualche obiezione, citando l'esempio delle due funzioni:

$$y_1 = x^2, \qquad y_2 = x \operatorname{mod.} x,$$

il cui wronskiano è nullo senza che fra esse esista una relazione lineare. Più di recente (*Sul determinante wronskiano*, Rend. dell'Acc. dei Lincei, s. 5ª, t. VI, 1897, 1° sem., p. 413-415) egli ha ripreso l'argomento, dimostrando che:

Se il wronskiano di n funzioni è nullo in tutto un intervallo ab senza che esista alcun punto di questo in cui sieno nulli tutti i complementi algebrici degli elementi dell'ultima linea di esso, tra le n funzioni esiste per tutti i punti di quell'intervallo una medesima relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e non tutti nulli.

La dimostrazione di Peano si fonda sui metodi di Grassmann e sulla teoria dei numeri complessi d'ordine superiore. Però il teorema può stabilirsi facilmente anche senza ricorrere a tali teorie.

Sia W il wronskiano delle n funzioni, e sieno ordinatamente $D_1, D_2, \dots, D_n$ i complementi algebrici degli elementi dell'ultima sua linea, $E_1, E_2 \dots, E_n$ quelli degli elementi della penultima. Applicando a D_i la nota regola di derivazione d'un determinante, si trova come risultato la somma di $n-1$ determinanti, di cui $n-2$ sono identicamente nulli, e l'ultimo è $-E_i$; sicchè si ha:

$$D'_i = -E_i \qquad (i = 1, 2 \dots, n).$$

Ora per una proprietà generale dei determinanti si ha:

$$D_1 y_1 + D_2 y_2 + \cdots + D_n y_n = 0, \tag{α}$$

e per una proprietà dei determinanti nulli:

$$\frac{E_1}{D_1} = \frac{E_2}{D_2} = \cdots = \frac{E_n}{D_n},$$

ossia:

$$\frac{D'_1}{D_1} = \frac{D'_2}{D_2} = \cdots = \frac{D'_n}{D_n}.$$

Posto:

$$D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2 = M^2,$$

si ha di qui facilmente:

$$\frac{D'_1}{D_1} = \frac{D'_2}{D_2} = \cdots = \frac{D'_n}{D_n} = \frac{M'}{M},$$

e quindi:

$$\frac{MD'_i - M' D_i}{M^2} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Poichè M non è mai nulla nell'intervallo ab, si potrà integrare l'espressione precedente per tutto quest'intervallo, e si avrà, indicando con k_i una costante:

$$\frac{D_i}{M} = k_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

quindi sostituendo nella (α) e sopprimendo il fattor comune M:

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n = 0, \tag{β}$$

per tutti i punti dell'intervallo ab.

Se supponiamo la condizione meno restrittiva che le D_i non possano esser nulle insieme in alcun punto *interno* dell' intervallo ab, l' integrazione potrà farsi, e quindi la relazione (β) sussisterà, per qualunque intervallo contenuto completamente *nell' interno* di ab.

Importa osservare che il teorema di Peano può, nei casi più ordinari, sostituire abbastanza bene quello più generale riconosciuto inesatto.

L' insieme dei posti-zero d'una funzione continua è *chiuso*, cioè contiene i propri punti-limiti. Se inoltre una funzione è sviluppabile in serie di Taylor nell' intorno di qualunque punto d' un intervallo ab, esclusi tutt' al più gli estremi, l' insieme I dei punti dell' intervallo in cui essa si annulla non può avere altri punti-limiti che gli estremi dell' intervallo stesso; infatti, se un punto interno P fosse punto-limite di I, esso apparterrebbe ad I, ed è facile vedere, coll'applicazione ripetuta del teorema di Rolle, che in P sarebbero nulle, oltre la funzione, anche le sue derivate di tutti gli ordini, sicchè la funzione sarebbe nulla in tutto l' intervallo. Ne segue che in ogni intervallo contenuto *nell' interno* di ab è compreso soltanto un numero finito di posti-zero della funzione.

Dopo ciò supponiamo le n funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sviluppabili in serie di Taylor nell' intorno di ogni punto d' un certo intervallo ab, esclusi tutt' al più gli estremi. La stessa proprietà apparterrà alle loro derivate di tutti gli ordini, ed anche — come è facile vedere — a tutti i minori del loro wronskiano W, ed alla funzione M. Se dunque W è nullo in tutto l' intervallo ab, o M sarà parimenti nullo in tutto ab, o avrà soltanto un numero finito di posti-zero in qualunque intervallo *interno* ad ab.

Nel secondo caso, se $a'b'$ è un intervallo qualunque interno ad ab, i posti-zero di M in esso contenuti lo divideranno in un numero finito di tratti, per tutti i punti di ciascuno dei quali avrà luogo una relazione lineare tra le y. Tale relazione potrà naturalmente essere diversa pei diversi intervalli come ab. Così, nell'esempio di Peano, si ha $y_1 - y_2 = 0$ in ogni tratto posto a destra dell'origine, $y_1 + y_2 = 0$ in ogni tratto posto a sinistra di essa.

Nel primo caso invece saranno nulle nell' intero intervallo tutte le D_1, $D_2, \ldots, D_n$. Designiamo con D_{hk} il minore (preso con segno opportuno) ottenuto sopprimendo le colonne h-esima e k-esima nella matrice formata colle prime $n-2$ linee di W. Supposto che non tutti i determinanti D_{hk} sieno nulli in ogni punto dell' intervallo ab, e p. es. che non lo sia $D_{n-1,n}$, il wronskiano D_n delle funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sarà nullo in tutto l' intervallo ab senza che lo sieno tutti i complementi algebrici degli elementi della sua ultima linea; e quindi ogni intervallo interno ad ab potrà dividersi in un numero finito di tratti in ciascuno dei quali avrà luogo una relazione lineare tra le $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Se le D_{hk} sono nulle in tutto l' intervallo ab, si dovrà passare ai minori d'ordine $n-3$, e così di seguito. Infine, se tutti i minori di secondo ordine formati colle due prime linee di W sono nulli in tutto

l'intervallo ab, o le $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono nulle in tutto questo intervallo, oppure ogni intervallo interno ad esso può dividersi in un numero finito di parti, in ciascuna delle quali sussiste una relazione lineare fra due delle y.

Concludendo:

Se le funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono sviluppabili in serie di Taylor nell'intorno di qualunque punto interno all'intervallo ab, e se il loro wronskiano è nullo per tutti i punti di esso, qualunque intervallo interno all'intervallo ab potrà dividersi in un numero finito di parti, in tutti i punti di ciascuna delle quali sussisterà una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e non nulli fra tutte od alcune delle funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Matematica. — *Osservazione sui massimi e minimi delle funzioni di due variabili.* Nota di G. VIVANTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla determinazione simultanea delle conducibilità termiche ed elettrica dei metalli a differenti temperature.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio BLASERNA.

Molti dei fisici che determinarono i coefficienti di conducibilità termiche dei metalli, tentarono pure di dedurne coi loro metodi le variazioni in funzione della temperatura. I risultati però non furono mai concordanti. Io credo che la causa dei non dubbî errori sia da ricercarsi principalmente nella difficoltà di applicare a differenti temperature l'uno dei metodi fin ora adoperati.

Il prof. H. F. Weber, del Politecnico di Zurigo, consigliò nelle sue lezioni di tentare la determinazione del coefficiente di temperatura della conducibilità termica dei metalli usando per riscaldarli la corrente elettrica, onde avere per qualsiasi temperatura dell'ambiente la stessa forma di riscaldamento. È facile, in base a questa idea, di sviluppare un metodo di misura che, oltre i coefficienti di conducibilità termica esterna ed interna, permetta di dedurre il coefficiente di conducibilità elettrica a differenti temperature. Si ha così il vantaggio di poter vedere se esista una relazione, non solo fra le conducibilità elettrica e termica (interna), su cui si è già molto discusso, ma anche fra le variazioni di esse in funzione della temperatura.

Nell'Istituto fisico del Politecnico di Zurigo cominciai alcune misure che ho ora compiute nell'Istituto fisico dell'Università di Roma, e di cui comunicherò quanto prima i risultati. In questo Rendiconto mi limiterò allo sviluppo teorico del metodo impiegato.

Si prenda un filo di lunghezza l e di piccola sezione circolare di superficie q e di perimetro p. Siano: k il coefficiente di conducibilità termica interna di esso, h quello di conducibilità esterna, $\frac{1}{\omega}$ il coefficiente di conducibilità elettrica e ϱ e c i coefficienti di densità e calore specifico, tutti presi nel sistema $c.\ g.\ s.$ e grado centigrado.

Sia u la temperatura, fissando come zero quella dell' ambiente, i la corrente elettrica che attraversa il filo ed infine x la coordinata corrente che determina la posizione di ogni sezione di esso, stabilendo per i due capi i valori $x = o$ ed $x = l$.

L' equazione differenziale del movimento del calore nel filo sarà evidentemente la seguente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{k}{c\varrho} - u\frac{hp}{cq\varrho} + i^2\frac{\omega}{\mathrm{E}cq^2\varrho}, \tag{1}$$

in cui E indica l' equivalente meccanico della caloria *e* t il tempo.

Per poter determinare facilmente le costanti di integrazione, stabiliamo che al principio dell' esperienza tutti i punti del filo debbano avere la temperatura zero e che i capi di esso debbano inoltre conservare questa temperatura. La soluzione dell' equazione (1) dovrà dunque soddisfare a queste condizioni:

(2) per $x = 0$ . . . . $u = 0$ per tutti i tempi
(3) per $x = l$ . . . . $u = 0$ » » ».
(4) per $t = 0$ . . . . $u = 0$ per tutte le x.

Osserviamo che la temperatura tende col crescere del tempo t ad uno stato stazionario, che indicheremo con S. Facciamo quindi $u = \mathrm{S} + \mathrm{V}$, intendendo per V la parte di u variabile col tempo. L' equazione (1) colle condizioni (2), (3), (4) si dividerà nelle due seguenti equazioni colle rispettive condizioni:

(1′)	$0 = \frac{d^2\mathrm{S}}{dx^2} - \mathrm{S}\frac{hp}{kq} + i^2\frac{\omega}{kq^2\mathrm{E}}$	$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = \frac{k}{c\varrho}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2} - \frac{hp}{q\varrho c}\mathrm{V}$	(1″)
(2′)	per $x = 0$ . . . $\mathrm{S} = 0$	per $x = 0$ . . . $\mathrm{V} = 0$	(2″)
(3′)	per $x = l$ . . . $\mathrm{S} = 0$	per $x = l$ . . . $\mathrm{V} = 0$	(3″)
		per $t = 0$ . . . $\mathrm{V} = -\mathrm{S}$	(4″)

Stato stazionario. Integriamo primieramente l' equazione (1′) colle condizioni (2′) e (3′). Facciamo sparire il termine $i^2\frac{\omega}{kq^2\mathrm{E}}$ ponendo:

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}' + \mathrm{C}\,,\ \text{ove}\ \mathrm{C} = i^2\frac{\omega}{\mathrm{E}qhp} \tag{5′}$$

L'equazione (1') diverrà:

$$0 = \frac{d^2S'}{dx^2} - S' \frac{hp}{kq}.$$

L'integrale di essa sarà:

$$S' = A\, e^{\lambda x} + B\, e^{-\lambda x} \text{ ponendo } \lambda = \sqrt{\frac{hp}{kq}}.$$

Per mezzo delle (2'), (3') e (5') si determinano le costanti:

$$A = -C \frac{1 - e^{\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}}, \quad B = + C \frac{1 - e^{-\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}}.$$

Il valore dello stato stazionario sarà dunque dato dalla formula:

$$S = C - C \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x} + e^{\lambda(l-x)} - e^{-\lambda(l-x)}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}},$$

la quale non varia mutando x in $l - x$, come è fisicamente evidente.

Osserviamo ancora che nel punto di mezzo si ha:

$$S_m = C - C \frac{2}{e^{\lambda \frac{l}{2}} + e^{-\lambda \frac{l}{2}}}.$$

Stato variabile. Per integrare l'equazione (1'') facciamo $V = T \cdot X$, dove T è funzione del solo tempo t ed X della sola coordinata x. Indicando con α^2 una costante positiva, la (1'') si dividerà per le regole note nelle due equazioni seguenti:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\alpha^2 \frac{k}{\varrho c} - \frac{hp}{q \varrho c}, \quad \frac{d^2X}{d^2x} + \alpha^2 X = 0,$$

i cui integrali sono rispettivamente:

$$T = C\, e^{-\left(\alpha^2 \frac{k}{c\varrho} + \frac{hp}{q\varrho c}\right) t}, \quad X = A \operatorname{sen} \alpha x + B \cos \alpha x.$$

La soluzione della (1'') avrà quindi la forma:

$$V = (A \operatorname{sen} \alpha x + B \cos \alpha x)\, e^{-\left(\alpha^2 \frac{k}{c\varrho} + \frac{hp}{q\varrho c}\right) t},$$

ove A e B indicano due costanti arbitrarie.

La condizione (2'') esige che B sia nullo; la (3'') esige che sen αl sia pure nullo; quest'ultima condizione determina un'infinità di valori di α compresi nella formula: $\alpha = \frac{n\pi}{l}$, ove n indica un numero intero positivo. La soluzione generale sarà quindi la somma delle infinite soluzioni particolari, che risultano per i singoli valori di n. Finalmente la condizione (4'')

sarà soddisfatta se determineremo le costanti A_1, A_2, ecc. in modo che sia soddisfatta la equazione:

$$-C+\frac{e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}+e^{\lambda(l-x)}-e^{\lambda(l-x)}}{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}}=\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x.$$

Col metodo di Fourier si ha:

$$A_n\int_0^l \operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{l}x\,dx=-C\int_0^l \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx+\frac{C}{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}}\int_0^l (e^{\lambda x}-e^{-\lambda x})\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx$$
$$+\frac{C}{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}}\int_0^l (e^{\lambda(l-x)}-e^{-\lambda(l-x)})\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

Siccome si ha:

$$A_n\int_0^l \operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{l}x\,dx=A_n\frac{l}{2},$$

$$C\int_0^l \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx=C\frac{2l}{n\pi} \quad \text{per } n \text{ dispari,}$$

$$=0 \quad \text{per } n \text{ pari,}$$

$$\frac{C}{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}}\int_0^l (e^{\lambda x}-e^{-\lambda x})\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx=C\,2l\frac{n\pi}{l^2\lambda^2+n^2\pi^2} \quad \text{per } n \text{ dispari,}$$

$$=0 \quad \text{per } n \text{ pari,}$$

$$\frac{C}{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}}\int_0^l (e^{\lambda(l-x)}-e^{-\lambda(l-x)})\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx=0 \quad \text{per ogni } n;$$

si trova:

$$A_n=-\frac{4C}{n\pi}\frac{\lambda^2 l^2}{\lambda^2 l^2+\pi^2 n^2} \quad \text{per } n \text{ dispari}$$
$$=0 \quad \text{per } n \text{ pari.}$$

È quindi determinata anche la parte variabile V.

Osserviamo che i coefficienti A_n diminuiscono e gli esponenti negativi di e aumentano rapidamente col crescere di n. Basterà quindi un tempo relativamente breve perchè tutti i termini con n superiore a 3 divengano trascurabili rispetto ai primi e l' espressione della temperatura divenga:

$$u=S-\frac{4C}{\pi}\frac{\lambda^2l^2}{\lambda^2l^2+\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}x\,e^{-\left(\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{\rho c}+\frac{hp}{q\rho c}\right)t}-\frac{4C}{3\pi}\frac{\lambda^2l^2}{\lambda^2l^2+9\pi^2}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{l}x\,e^{-\left(\frac{9\pi^2}{l^2}\frac{k}{\rho c}+\frac{hp}{q\rho c}\right)t}.$$

In uno dei punti poi aventi la coordinata $x=\frac{l}{3}$ oppure $x=\frac{2l}{3}$, l'ultimo termine a destra di questa espressione sarà identicamente nullo e si avrà la temperatura espressa dalla formula:

$$(u)_{\frac{l}{3}}=(S)_{\frac{l}{3}}-\frac{2C}{\pi}\frac{\lambda^2l^2}{\lambda^2l^2+\pi^2}\sqrt{3}\,e^{-\left(\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{c\rho}+\frac{kp}{q\rho c}\right)t}. \tag{6}$$

Se in questo punto si farà una serie di misure di temperatura ad uguali intervalli di tempo δt e se ne formeranno i decrementi logaritmici per ogni ν intervalli, la media di essi, che diremo N sarà uguale alla quantità:

$$\left(\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{c\varrho}+\frac{hp}{qc\varrho}\right)\nu\,\delta t.$$

Osservando che $\lambda^2=\frac{hp}{kq}$ si deduce:

$$\text{(I)}\qquad N=\frac{1}{l^2}\frac{k}{c\varrho}(\pi^2+l^2\lambda^2)\;\nu\,\delta t.$$

Dalla serie delle osservazioni eseguite, quando si avrà calcolato il decremento logaritmico, si potrà pure ottenere una serie di valori del coefficiente di e nella (6). Sia M il valore medio dedotto; si avrà l'equazione:

$$\text{(II)}\qquad M=\frac{2C}{\pi}\frac{\lambda^2 l^2}{\lambda^2 l^2+\pi^2}\sqrt{3}.$$

Finalmente osservando anche la temperatura stazionaria nel punto di mezzo si avrà pure l'equazione:

$$\text{(III)}\qquad (S)_m=C-\frac{2C}{e^{\lambda\frac{l}{2}}+e^{-\lambda\frac{l}{2}}},$$

la quale unitamente alle (I) e (II) servirà per dedurre $\lambda^2 l^2$, k e C.

Coll'aiuto delle relazioni: $\lambda^2=\frac{hp}{kp}$ e $C=i^2\frac{\omega}{Eqhp}$ si dedurrà k, h ed ω.

Resta quindi pienamente dimostrata la possibilità di dedurre simultaneamente i due coefficienti di conducibilità termica, e quello di conducibilità elettrica relativi ad un filo metallico.

Quando lo stato stazionario delle temperature è stato raggiunto, si può interrompere la corrente, osservare come procede il raffreddamento del filo e dedurre in modo analogo al precedente i coefficienti voluti. Infatti il problema si riduce all'integrazione dell'equazione differenziale

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{c\varrho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{hp}{c\varrho q}u$$

avendo cura di soddisfare alle condizioni:

per $x=0$ . . . . $u=0$ per tutti i tempi
per $x=l$ . . . . $u=0$ " " "
per $t=0$ . . . . $u=S$ per tutte le x.

Per l' analogia di questa equazione e delle sue condizioni con quella determinante lo stato variabile V, si deduce la seguente soluzione:

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \, e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}\frac{k}{c\rho} + \frac{hp}{c\rho q}\right)t},$$

ove i coefficienti A_n hanno lo stesso valore assoluto, ma i segni contrarî dei coefficienti A_n dello stato variabile V. Basterà quindi un tempo assai breve perchè la temperatura del filo in uno dei punti $x = \frac{l}{3}$ oppure $x = \frac{2l}{3}$ sia espressa dal solo primo termine della serie. In modo analogo al precedente si potranno stabilire le equazioni (I), (II), (III) e dedurne i coefficienti voluti.

Nelle misure recenti sulla conducibilità termica di un filo metallico, si evitò di fondare il metodo su osservazioni di temperatura stazionaria in punti di cui si debbano misurare le coordinate. Infatti, riscaldando il filo ad una estremità, come fin ora si fece, si produce in esso una ripartizione della temperatura espressa dalla formula generale

$$u = A\, e^{-mx}.$$

Essendo la u una funzione rapidamente decrescente col crescere di x, basterà un piccolo errore nella determinazione dell' ordinata del punto in cui si misura la temperatura (errore che in pratica non si può mai evitare), per produrre un assai grave errore nella determinazione dei coefficienti.

Osserviamo però che il metodo esposto non esige che la determinazione delle temperature stazionarie nel punto di mezzo del filo e nel punto corrispondente ad $x = \frac{l}{3}$, oppure $x = \frac{2l}{3}$. Ora, siccome per il nostro speciale metodo di riscaldamento, la temperatura del filo varia assai lentamente nelle vicinanze dei detti punti, un piccolo errore nella collocazione del termometro o della pila elettrica non avrebbe che un' influenza minima sui risultati, come è facile verificare. Per esempio, per un filo di ferro di 20 cm. di lunghezza e 0,4 cm. di diametro, l' errore di un millimetro nella collocazione della pila termoelettrica in ciascuno dei punti considerati produrrebbe un errore di $\frac{1}{200}$ circa nel computo di ω ed h ed un errore del tutto trascurabile nel computo di k.

Fisica. — *Sulla diffusione dei raggi Röntgen* (¹). 2ª Nota dei dott. R. Malagoli e C. Bonacini, presentata dal Socio Blaserna.

Nella presente Nota esponiamo i risultati di uno studio sperimentale che abbiamo fatto sul comportamento dei corpi nel fenomeno di diffusione dei raggi X, attenendoci ad un metodo esente dalle cause d' errore da noi rilevate (²).

II. La disposizione speciale da noi seguìta, e che è rappresentata in sezione verticale nella fig. 1, permette di studiare due diffusori ad un tempo R ed R_1

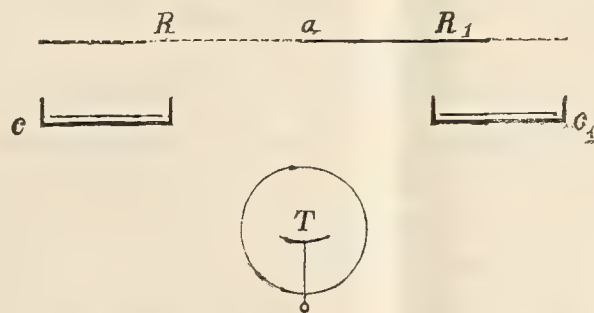



Fig. 1.

e di utilizzare quindi meglio la radiazione del tubo T durante le pose sempre assai lunghe (almeno 1 ora e mezza). Le lastre sensibili, avvolte in più buste di carta nera, sono affacciate ai diffusori, alla distanza di circa 4 cm., entro due scatole di piombo c e c_1; sulle lastre stanno gli oggetti di cui si voglia l' ombra radiografica.

Regolando opportunamente le distanze delle diverse parti, si può ottenere che ciascuna delle due lastre risenta soltanto l' azione di quel diffusore che le sta sopra: così si evita di porre in a un tramezzo, la cui influenza evidentemente disturberebbe.

Capovolgendo la figura, si ha la disposizione che ci ha servito usando come diffusori dei corpi liquidi oppure delle polveri: come recipienti furono allora sempre adoperate bacinelle ampie e profonde (³).

(¹) Lavoro eseguito nel R. Istituto Tecnico di Modena.

(²) Vedi Iª Nota, Rendiconti Lincei, 20 febbraio 1898.

(³) Facendo uso di polveri leggiere, bisogna anche evitare la disseminazione che ne fa il tubo per effetto elettrostatico. Trovammo sufficiente per ciò collocare fra il tubo ed il diffusore un sottile foglio di carta.

III. Sperimentando con tale dispositivo, siamo giunti ai seguenti risultati:

1°. Abbiamo intanto assodato anche una volta che tutti i corpi studiati, solidi o liquidi, danno luogo, in maggiore o minor grado, ad una diffusione di raggi.

In generale con metalli pesanti si ha una impressione vigorosa; però anche corpi di altro genere ci hanno date azioni grafiche assai intense, particolarmente un forte strato di cartone e di olio di ulivo.

L' intensità della diffusione va, *caeteris paribus*, diminuendo man mano che il *focus* invecchia. Questa circostanza si è costantemente verificata per ognuno dei 4 tubi, che noi abbiamo usato nelle nostre esperienze: essa può attribuirsi tanto alla penetrazione ognora crescente dei raggi emessi dal tubo, come anche ad un minor rendimento di questo.

2°. I raggi rinviati da un corpo possono alla lor volta venir diffusi da un altro corpo, su cui incidano.

Questa diffusione di second' ordine noi abbiamo verificato, sia col metodo descritto nella Esperienza 1ª della nostra Nota precedente, sia duplicando il dispositivo della fig. 1, come è facile comprendere. In ogni caso il fascio diffuso di second' ordine è estremamente debole, e solo con durate di esposizione lunghissime (di due o più ore) si può averne traccia sicura.

3°. L' effetto di diffusione, se non esclusivamente, è prevalentemente superficiale, per corpi opachi ai raggi X. — Così ad es. una lastra di rame di $^1/_4$ di mm. di spessore ed un' altra spessa 4 mm. dànno effetti uguali. Dieci fogli di stagnola sovrapposti non dànno differenza apprezzabile nella diffusione da quella che si ha da un foglio solo ecc.

Però, quanto più il corpo è trasparente pei raggi X, tanto maggiore è lo spessore dello strato attiguo alla superficie che sembra prender parte al fenomeno. — Così un cartone di 1 mm. di spessore diffonde meno di 2 cartoni uguali sovrapposti. Ad analogo risultato si arriva colla paraffina, coll' ebanite etc., adoperate in istrati di diverso spessore.

4°. La diffusione di un solido non varia, se lo si prende in uno stato di suddivisione più o meno avanzata. — Così una lastra di ferro produce lo stesso effetto di uno strato di limatura a grana più o meno fine. Uno strato di truccioli minuti di piombo equivale ad una lastra dello stesso metallo; ecc.

Questa circostanza, come ben si comprende, permette di sottoporre ad esame anche quei corpi solidi che non è possibile, o almeno difficile, avere in lamine (vedi oltre).

É noto come Röntgen fin nella sua prima Memoria facesse rilevare, che quanto alla trasparenza, le polveri sono equivalenti a lamine dei rispettivi solidi. Tale equivalenza si mantiene dunque anche nel fenomeno della diffusione.

5°. Studiando poi i nostri negativi, vien fatto di rilevare un carattere assai notevole, pel quale essi si possono distinguere, non tanto per l'*entità* della diffusione, quanto pel *modo* con cui questa si manifesta.

In certuni difatti si nota che l'impressione è marcatamente decrescente dalle regioni più vicine al tubo alle più lontane, e analogo andamento si nota pure nella densità delle immagini degli oggetti non opachi radiografati (benchè la legge di decrescenza non appaia la stessa per tutti): inoltre gli oggetti opachi, appoggiati sulla lastra e aventi qualche spessore, dànno immagini a contorno sfumato dalla parte opposta al tubo, cioè proiettano un'ombra. — In altri invece l'impressione, generalmente più debole che nei precedenti, si presenta pressochè uniforme in tutta la loro estensione; e degli oggetti, che erano appoggiati sulla lastra durante la posa, si hanno immagini a contorni ugualmente netti da ogni parte, senza cioè alcun'ombra portata.

Negativi ascrivibili nettamente al primo tipo (che per brevità diremo *tipo A*) si ottengono, quando si usino come diffusori dei corpi molto opachi ai raggi X; quelli del secondo tipo (che diremo *tipo B*), invece corrispondono a diffusori molto trasparenti.

Con diffusori di opacità intermedia si ottengono negativi che tengono dell'uno e dell'altro tipo. Per brevità li diremo di *tipo AB*.

Queste diversità nell'aspetto dei negativi inducono subito a pensare che, mentre da corpi trasparenti si ha una diffusione di raggi omogenea, cioè uguale in tutte le direzioni, invece dai corpi opachi questi raggi siano rinviati in tanta maggior copia, quanto più la direzione di rinvio si avvicina a quella che corrisponderebbe alla riflessione regolare. E questa interpretazione viene invero consigliata anche per analogia con fenomeni luminosi.

Noi abbiamo difatti sperimentato col dispositivo della fig. 1, sostituendo al tubo T una sorgente luminosa (la fiamma di una candela), ed usando come diffusori R ed R_1 una tavola di legno dipinta in bianco con biacca, ed una lamina di zinco grezzo. Sulle due lastre sensibili (nude) poste in c e c_1 sono disposti degli oggetti opachi di un certo spessore (pesi da bilancia). Orbene, la lastra che risentì l'azione diffondente dello zinco, presenta un'immagine avente la caratteristica dei negativi radiografici del tipo A, in cui cioè gli oggetti presentano un'ombra portata, tanto più lunga e marcata quanto più sono lontani dalla sorgente luminosa. Si ha invece un'immagine del tipo B nella lastra su cui agì la luce diffusa dalla biacca: neppure un oggetto alto 4 cm. proietta ombra.

La differenza di comportamento dei corpi trasparenti ed opachi pei raggi X nell'effetto finale della diffusione studiata, appare adunque analoga a quella che esiste per la luce fra i corpi a superficie matta e quelli alquanto speculari [1].

[1] Si connettono forse con ciò alcune osservazioni isolate che fanno sentire una dipendenza fra l'intensità del fascio di raggi X rinviato da certi corpi e la direzione di

Ma a meglio spiegare la poca, e talora proprio nulla, degradazione del fondo nei negativi del tipo B, si può invocare un altro fatto. Si può pensare cioè che tutti i corpi translucidi pei raggi Röntgen, oltre una diffusione puramente superficiale, ne presentino un' altra, che potremo dire *diffusione di massa*, la quale ha luogo entro uno strato attiguo alla superficie, e tanto più spesso quanto maggiore è la trasparenza del diffusore. Ciò discende logicamente da una nostra conclusione precedente (n. 3); ed è anche conforme all' idea, ormai generalmente invalsa, di considerare i corpi rispetto ai raggi X come dei mezzi torbidi.

E del resto in un ordine di fatti molto analogo a questo si hanno già conclusioni precise da uno studio sperimentale di Winkelmann e Straubel [1]; i quali dimostrano appunto l' esistenza di una « *diffuse Ausbreitung* » dei raggi X in una serie di corpi tanto solidi che liquidi. Essi veramente hanno studiato tale disseminazione soltanto *al di là* del corpo colpito dai raggi del tubo: le nostre osservazioni vengono a completare le loro conclusioni, facendo rilevare l' esistenza del fenomeno anche nel senso opposto, però con intensità relativamente assai minore.

Abbiamo anche studiato come influisca sull'entità dell'effetto grafico la distanza della lastra sensibile dal diffusore (fra 1 e 5 cm.), ripetendo in ogni caso una esperienza parallela colla luce.

Appartenga il diffusore al tipo A o al tipo B, i raggi diffusi sembrano diminuire la loro azione, col crescere della distanza, con legge di decrescenza analoga a quella che si verifica per la luce.

5°. Un' altra particolarità notevole è una *diversità di composizione* del fascio diffuso dai diversi corpi (quand' anche il fascio diretto provenga dalla stessa sorgente); diversità, che vien messa in evidenza dal differente potere di penetrazione del fascio stesso. Per mettere in mostra questa diversa qualità dei raggi diffusi si disponevano sulle lastre sensibili in c e c_1 (fig. 1) delle scale di trasparenza perfettamente uguali, cioè delle collezioni di corpi di diversa trasparenza pei raggi X. Per ognuno dei diffusori studiati, oltre la prova di diffusione, se ne faceva un' altra per trasmissione, usando la medesima scala di trasparenza (vedi fig. 2).

Orbene, i raggi diffusi da certi corpi appaiono identici pei loro caratteri ai raggi X incidenti; sicchè una radiografia ottenuta con essi non differisce sensibilmente, quanto alla trasparenza relativa dei corpi, da quella ottenuta con raggi diretti. Invece i raggi diffusi da altri corpi si mostrano assai meno penetrativi degli X, sì che la stagnola, il vetro, l' alluminio, la mica,

---

rinvio. Cfr. ad es. Villari (Atti della R. Acc. di Napoli, 15 febbraio 1896); Joly (Dublin University Exp. Science Association, 3 marzo 1896); Rood (American Journal of Science, settembre 1897).

[1] Wied. Ann., n. 10, 1896.

ecc., sono già per essi opachi anche in lamine sottilissime, e ben poco trasparenti sono il cartone, il legno, ecc.

Per quanto la riduzione nel potere penetrativo varî alquanto colla natura del diffusore, pure si può facilmente constatare che sono nel secondo

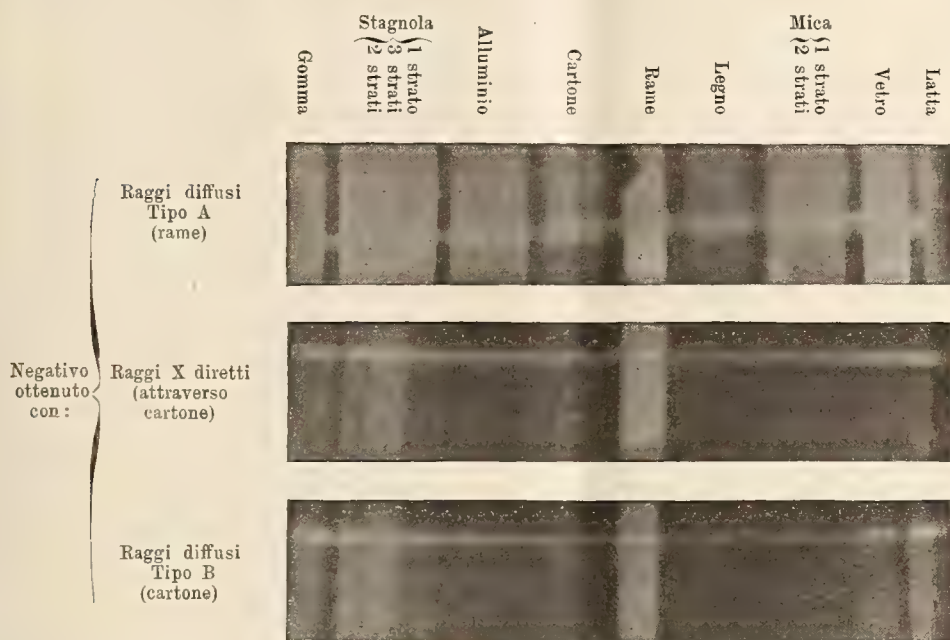



Fig. 2.

caso i corpi che già dicemmo del tipo A, e sono invece nell' altro i corpi del tipo B. La fig. 2 presenta appunto un negativo di ciascuno dei due tipi, insieme ad una prova di trasparenza che serve per confronto. Tali prove sono ridotte ad $^1/_2$ del vero. La striscia trasversale che si nota in ognuna di esse è dovuta ad una listerella di zinco che manteneva aderenti le scale di trasparenza allo strato sensibile. Queste listerelle, uguali di larghezza in ogni caso, non appaiono tali nelle prove A e B, in conformità al carattere rilevato al n. 5, (v. fig. 2 che rappresenta tre prove, ridotte circa alla metà del vero) (1).

Ciò posto, e data la complessità del fascio emesso dal *focus*, noi fummo dapprima condotti a pensare ad una *criptocrosi per diffusione*; a credere cioè che nelle radiazioni diffuse, i corpi si *colorassero*, per così dire, come avviene per la luce. Così però si ammetterebbe che i raggi diffusi facessero

(1) L'età del *focus* non influisce sensibilmente sulla natura del fascio diffuso, (come ci risultò ripetendo una stessa esperienza più volte nella serie), sicchè potemmo ritenere comparabili i risultati successivamente ottenuti. È inutile avvertire che la qualità delle lastre (ordinarie Cappelli) ed il bagno di sviluppo (ossalato ferroso) si mantennero sempre costanti.

Nel caso poi di liquidi o di polveri, per eliminare un' eventuale influenza del recipiente, oltre prendere il diffusore in istrato assai grosso, si avvertiva che questo fosse di tipo opposto a quello. E del resto in quei pochi casi in cui ciò non si potè prevedere, e si dovette quindi ripetere l' esperienza dopo l' opportuna variazione, l' influenza del recipiente ci si mostrò trascurabile (n. 3).

già parte del fascio incidente, e che nell' incontro col diffusore avvenisse soltanto una selezione: ciò che non è convalidato dall'esperienza.

All' incontro per studî fatti da altri in campo affine, ci si può dar ragione del fenomeno in altro modo.

G. Sagnac, raccogliendo una idea emessa dal Röntgen a proposito della diffusione dei raggi X prodotta dall' aria (1) ha con una lunga serie di esperienze cercato di provare che i raggi stessi possono subire incontrando un corpo, una trasformazione, sicchè questo diventerebbe come *luminescente* (2). Di tali esperienze *una soltanto* è veramente decisiva circa la esistenza di raggi trasformati o *secondarî* (come piace al Sagnac di chiamarli); quella cioè del cambiamento sensibilissimo di trasparenza che presenta una lastra ad es. di alluminio, che si disponga ad intercettare il fascio prima o dopo la diffusione fattane da un metallo (3): le altre invero si presterebbero tutte ad essere interpretate anche nell' ipotesi di una semplice azione selettiva esercitata dai corpi diffondenti su cui arriva il fascio emesso dal *focus*. Peraltro quell'esperienza è più che sufficiente perchè la produzione dei nuovi raggi appaia anche a noi l' interpretazione più verosimile del fenomeno che stiamo studiando. Tanto più che il Ròiti ha di recente dimostrato per altra via l' esistenza di un fenomeno perfettamente analogo, che si verifica nel fascio *trasmesso* dai metalli, e che egli chiama *criptoluminescenza* (4).

Accettando dunque questo modo di vedere, noi considereremo i corpi del tipo A, meglio che come diffusori, come trasformatori dei raggi X incidenti; e adottando la denominazione del Ròiti anche per indicare la genesi di nuovi raggi nella diffusione, diremo questi corpi *criptoluminescenti*.

IV. Dobbiamo però soggiungere che non abbiamo potuto seguire Sagnac oltre la questione di massima. Le nostre prove ci conducono a dissentire dalle sue ulteriori conclusioni.

Mentre difatti il Sagnac nelle sue due prime note (5) ammette la trasformazione dei raggi X in raggi secondarî *soltanto pei diffusori metallici* (escludendone però l' alluminio), più tardi lascia capire di estendere la proprietà ai corpi in genere (6), e dice infine di averla riscontrata anche nell' aria (7).

Orbene, le nostre esperienze che, grazie il metodo fotografico, hanno potuto essere condotte colle maggiori garanzie, ci permettono di affermare che le cose non stanno propriamente così.

(1) Sitzungsberichte der Berl. Akad., maggio 1897.
(2) Comptes rendus, 19 luglio 1897 e segg.
(3) Comptes rendus, 6 dicembre 1897.
(4) Rendiconti Lincei, 20 febbraio 1898.
(5) Comptes rendus, 26 luglio e 6 dicembre 1897.
(6) Comptes rendus, 7 febbraio 1898.
(7) Comptes rendus, 14 febbraio 1898.

Corpi che possano ritenersi nettamente criptoluminescenti, sono quelli che noi collochiamo nel gruppo A. Un' altra grande categoria di corpi esiste invece che appaiono essere dei *semplici diffusori*, quelli del gruppo B. E, come già notammo per altre caratteristiche (nn. 3 e 5) dall' uno tipo all' altro si passa per gradi successivi, talchè si può anche qui formare un gruppo di corpi (A-B) che mostrano proprietà intermedie.

La seguente tabella, riassume l' analisi accurata delle numerose nostre prove.

Gruppo A.		*Gruppo* A-B.		*Gruppo* B.	
NOME	Peso specifico	NOME	Peso specifico	NOME	Peso specifico
Zinco	7,2	Biossido di manganese	4,8	Legni	0,5 - 0,7
Rame.	8,9	Solfato di bario.	4,5	Cartone	1,2
Stagno.	7,3	Smeriglio	4	Ebanite	1,2
Mercurio.	13,6	Cristallo.	3,3	Paraffina.	0,9
Ferro.	7,8	Iodio.	4,9	Carbone di storta	1,9
Platino	22,5	Acido arsenioso.	3,7	Alluminio	2,6
Argento	10,5			Magnesio	1,8
Litargirio	9,1			Acqua	1,0
Minio	8,6			Olio d' ulivo . .	0,9
Ossido di zinco.	5,4			Acido solforico.	1,8
				Zolfo.	1,9
				Ossido di magnesio.	2,3

Non abbiamo potuto, come sarebbe stato nostro desiderio, estendere le ricerche ad un numero maggiore di corpi; sia per la scarsità dei mezzi sperimentali, sia perchè le esperienze di questo genere richiedono moltissimo tempo. Ma dallo specchio riportato risulta intanto evidente come nel gruppo A non figurino solo dei metalli; mentre nel gruppo B figurano Al ed Mg, e presumibilmente vi troverebbero posto anche altri metalli leggieri (come Ca, Na, K), coi quali non è possibile sperimentare.

Per ciascun corpo poi, come si vede, il carattere che prevalentemente decide del gruppo a cui esso è ascrivibile, appare essere il *peso specifico* (1) cioè, fatte le debite riserve, la trasparenza pei raggi X: per quanto tale carattere non decida sempre del maggior o minor grado con cui un corpo mostra le proprietà specifiche del gruppo a cui appartiene. I diffusori del gruppo A sono i più pesanti: quelli del gruppo B i più leggieri.

(1) Il contegno dei metalli non sarebbe piuttosto legato al *peso atomico*, dal quale dipende pure il loro potere emissivo, come brillantemente ha dimostrato il Ròiti? (Rendiconti Lincei, 5 settembre 1897) - Le nostre esperienze non lo escluderebbero in modo assoluto.

Dei liquidi uno solo è criptoluminescente, il mercurio; che per il peso si distanzia appunto enormemente da tutti gli altri. — La natura chimica del diffusore ha influenza solo in quanto i componenti possono decidere del maggiore o minore peso. — Seguendo il criterio del peso, noi abbiamo potuto prevedere il contegno di corpi non ancora studiati. — I diffusori del gruppo A-B dànno prove che tengono tanto più delle caratteristiche del gruppo A, quanto maggiore è il loro peso; e viceversa.

Quanto poi all' aria, cui il Sagnac attribuisce un potere di trasformazione analogo a quello dei metalli, noi abbiamo invece riscontrato che essa è nettamente ascrivibile al tipo B.

Nella nostra Nota precedente abbiamo descritto un dispositivo sperimentale (Esp. 3ª) che ci servì per verificare l' *entità* della diffusione dell' aria rispetto a quella degli altri corpi. Lo stesso dispositivo può evidentemente servire per mettere in chiaro la *qualità* dei raggi diffusi: basta disporre al solito sulla lastra sensibile una scala di trasparenza ed esagerare opportunamente la durata dell' esposizione. Orbene l' immagine avuta dopo 4 ore di posa, per quanto assai debole, è tale da non ammettere dubbî. L' aria cioè, come corpo leggiero e trasparente per i raggi X, rientra nella categoria B.

Del resto osservando bene il dispositivo descritto dal Sagnac nelle sue ricerche sull' aria [1], ci si persuade facilmente che le parti *metalliche* che servivano a limitare o a guidare i raggi dovettero influire colla loro diffusione, alterando l' effetto proprio dell' aria, che è sempre debolissimo.

V. Dopo quanto abbiamo esposto, se ci si lascia guidare dall' analogia coi fenomeni luminosi, dall'analogia con quanto accade nel fascio trasmesso, ove i raggi trasformati accompagnano i raggi X inalterati, e più che tutto dal passaggio graduale dei diffusori dal gruppo B al gruppo A, vien fatto di pensare che tutti i corpi siano atti a diffondere raggi X inalterati e a trasformarne in raggi di criptoluminescenza, e che il contegno specifico di ogni corpo, risultante sempre dall' insieme dei due effetti, dipenda dall' intensità relativa di questi. Pei corpi A sarebbe di entità trascurabile il primo effetto; pei corpi B il secondo.

La proprietà fisica a cui è legato il potere di trasformazione dei diversi corpi è, secondo le nostre esperienze, il peso. — A questo del resto si connettono anche tutte le altre particolarità da noi rilevate nella diffusione dei raggi Röntgen.

Fisica. — *A proposito della interpretazione del fenomeno di Zeemann data dal sig. Cornu.* Nota del dott. ORSO MARIO CORBINO, presentata dal Socio BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) Loco citato.

Meteorologia. — *Sulla relazione fra il carattere termico di una stagione e quello delle stagioni seguenti* [1]. Nota del dott. Ettore Bortolotti presentata dal Socio Tacchini.

I.

Per completare lo studio della variazione annua della temperatura a Roma, di cui mi sono occupato in due Note precedenti, rimane da cercare quali presumibili effetti abbia il carattere termico di una stagione determinata su quello delle stagioni successive.

A tale scopo ho incominciato col rappresentare graficamente il fenomeno da studiare, segnando sull'asse delle ascisse, con punti equidistanti fra di loro, ordinatamente le stagioni per ciascuno degli anni della serie 1855-94 da me presa in esame, e dando per ordinata a ciascuno di quei punti, lo scostamento, dalla normale di quella stagione, della temperatura corrispondente.

Quando, nel diagramma che così si ottiene, si osservino *i tratti che vanno dall' inverno all' estate di ciascun anno, si vede che questi sono formati da porzioni di spezzate che volgono le convessità verso il basso* [2] *tutte le volte che il primo punto è alquanto al disopra dell' asse delle ascisse, e volgono invece al basso la concavità se il primo punto è situato al disotto dell' asse.*

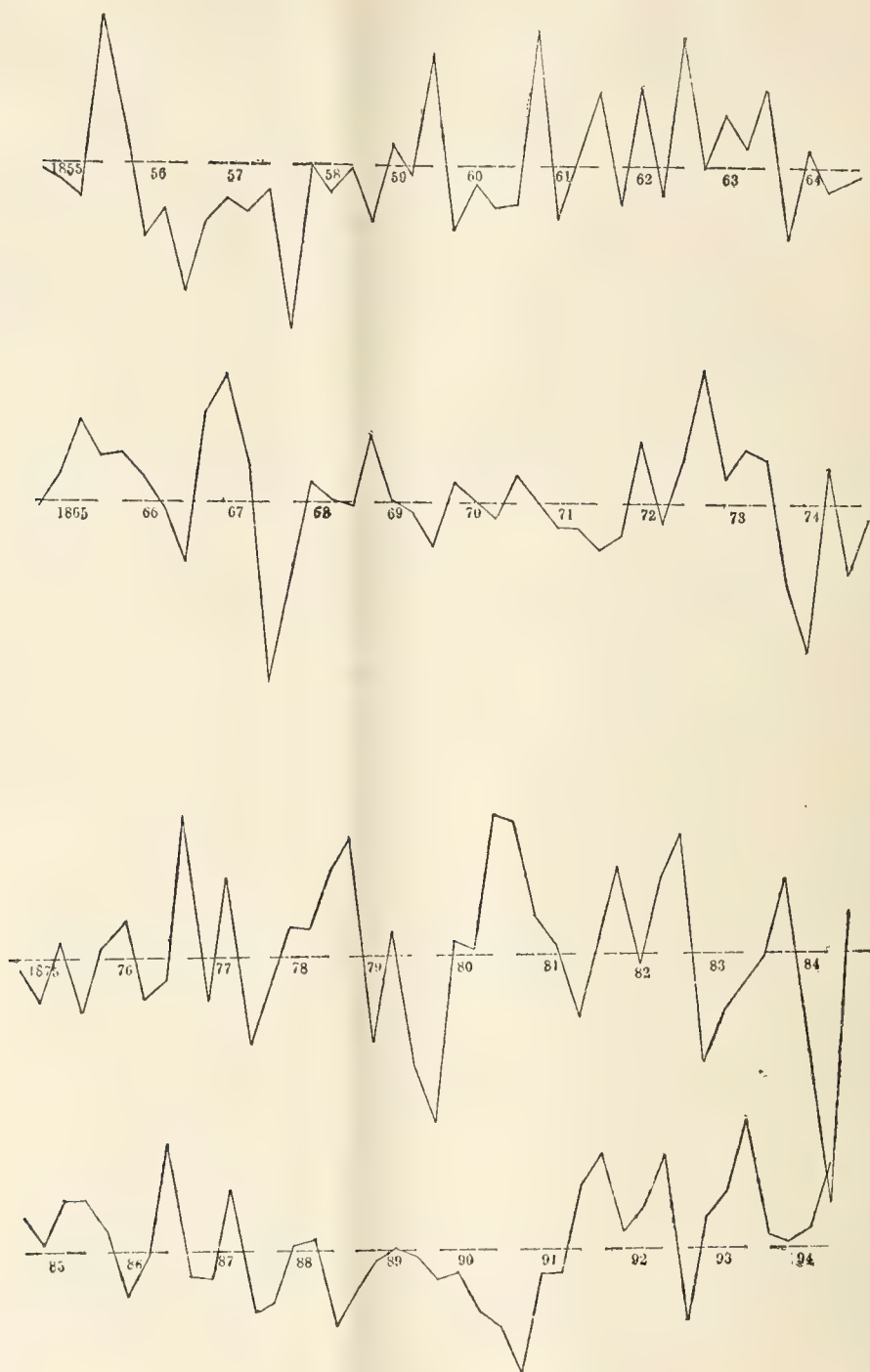
Di qui si può dedurre che:

Quando la temperatura media invernale si scosta notevolmente dalla normale, nella seguente primavera la temperatura tende a riaccostarvisi ed in generale la oltrepassa dando luogo a scostamenti di senso inverso a quelli dell' inverno. Nell' estate seguente poi, gli scostamenti della temperatura tendono a riprendere il medesimo senso degli invernali.

Nei 40 anni della serie considerata, la legge grafica enunciata superiormente si trova esattamente verificata 33 volte, e degli anni rimanenti, 5 ebbero temperature invernali con scostamenti inferiori all' errore probabile di questa stagione, di modo che potremo dire che, fra gl' inverni sensibilmente più freddi dell' ordinario, quello solo del 1874 non fu seguito da una primavera troppo calda, e fra gli anni con inverni sensibilmente troppo miti, quello solo del 1867 non fu seguito da primavera relativamente troppo fredda.

[1] Lavoro eseguito nell' Ufficio Centrale di Meteorologia.

[2] Quando le ascisse di tre punti A, B, C, sieno in ordine di grandezza crescente, si dirà che la spezzata ABC volge la convessità verso il basso quando il vertice B si trova nell' angolo acuto formato dalla retta AC con una parallela all' asse della x situata al disotto del più basso dei tre punti dati.

In generale anzi si nota che: « *Tanto più l'inverno è relativamente mite, tanto più fredda è la primavera e tanto più caldo è l'estate seguente;*

e che tanto più l'inverno è rigoroso, tanto più è probabile di avere una primavera relativamente calda, ed un estate più fresco della media.

Questo può verificarsi immediatamente dall' esame del diagramma costruito, e si trova avverato anche negli anni precedenti a quelli della serie

considerata, come può vedersi esaminando le temperature registrate nel citato lavoro del Secchi. Per quello che riguarda la dipendenza delle variazioni termiche dell'estate da quelle dell'inverno precedente, rimangono così confermate, anche pel clima di Roma, le deduzioni dell'Hellmann (1) il quale appunto aveva osservato che: « *Tanto più un inverno è mite, tanto più è probabile che l'estate seguente sia troppo calda, e che tanto più freddo è l'inverno, tanto più fresca è l'estate seguente* ».

Per quello poi che riguarda il rigore della primavera susseguente ad un inverno troppo mite, il fatto è abbastanza noto anche ai nostri agricoltori che giustamente temono le brine primaverili in quegli anni in cui l'inverno non fa sentire il solito rigore.

Hellmann ha anche studiato la dipendenza delle temperature invernali da quelle dell'estate precedente ed ha creduto di poter stabilire che: *Tanto più un estate è caldo, tanto più probabilmente sarà seguito da un inverno troppo freddo.*

Questa legge è abbastanza bene verificata anche nel nostro clima perchè fra i 16 estati in cui la temperatura media superò la normale di almeno un decimo di grado, 5 furono seguiti da inverni troppo miti, ed 11 da inverni troppo freddi. Non deve credersi però che la legge sia tanto più probabilmente verificata quanto più alta è la media temperatura estiva perchè, limitandoci all'esame di quegli estati che ebbero temperature superiori alla normale per più dell'errore probabile di questa stagione, troviamo la legge verificata 6 volte su 10, e per quegli scostamenti positivi che superano il doppio dell'errore probabile la legge è verificata 3 volte su 6, infine per scostamenti superiori al triplo dell'errore probabile la legge è avverata una volta su due.

Volendo studiare l'andamento della temperatura dall'estate di un anno all'inverno del successivo, con lo stesso metodo tenuto per il periodo che va dall'inverno all'estate, basterà considerare le porzioni di spezzata corrispondenti nella rappresentazione grafica che abbiamo fatta.

Quando si ponga mente alla concavità od alla convessità di tali spezzate si scorge che, per periodi determinati, si seguono spezzate tutte o quasi tutte concave, e spezzate tutte, o quasi tutte, convesse, e che quei periodi in cui si hanno spezzate concave, concordano coi periodi d'inverni freddi, e quelli con spezzate convesse concordano coi periodi di inverni troppo caldi. Ciò si verifica immediatamente per i periodi con inverni freddi dal 1854 al 1865 e dal 1887 al 1893, e per il periodo 1866-77 in cui prevalgono gl'inverni troppo miti, e da questo può concludersi che: « *Nei periodi con inverni troppo miti, l'autunno ha, relativamente alla normale, temperature*

(1) Sitzungsb. d. Berl. Akad. 1885, XIV, pag. 205.

più basse che non quelle dell' estate e l' inverno seguente ha, rapporto alla normale, temperature più alte che l' autunno ».

« *Nei periodi invece in cui prevalgono gl' inverni troppo freddi, le temperature dell' autunno hanno alla normale di questa stagione rapporti anche più elevati che non nell' estate precedente, ma nelle temperature dell' inverno consecutivo predomina la tendenza ad abbassarsi al disotto della normale* ».

II.

Non mancano le ipotesi per spiegare la dipendenza, ora accertata, del carattere termico di una data stagione da quello delle stagioni precedenti, e principalmente si è cercato di spiegare la tendenza, più volte notata, delle temperature di una determinata epoca dell' anno a continuare per periodi più o meno lunghi nella stessa maniera di deviazione.

Non mi pare però che si possa, per ora, stabilire quale sia maggiormente accettabile delle ipotesi fatte sulla natura delle cause di questo fenomeno, e nemmeno mi pare possa dirsi che gli studî lungamente proseguiti per mettere questo fenomeno in relazione con altri fenomeni naturali, come il passaggio degli asteroidi, le macchie del sole etc. . . . , abbiano portato a qualche sicuro risultamento.

Dovremo perciò limitarci ad ammettere l' esistenza di una, o parecchie cause, le quali insieme col variare della declinazione solare determinano il carattere termico di ogni stagione. Le osservazioni fatte in questi 40 anni poi, mi portano a credere che il periodo secondo cui gli effetti di queste cause si manifestano non sia esattamente annuale, ma lo sia solo approssimativamente, e che la differenziazione fra i caratteri termici di una stessa stagione nei diversi anni, piuttosto che alla varia intensità di queste cause, si debba attribuire al variare del tempo in cui esse si presentano.

Per vedere come, con ciò si possa senz' altro dar ragione dei fenomeni osservati, giova ricordare che il minimo di temperatura nell' anno normale si ha, per le diverse stazioni dell' Europa, in giorni che variano dall' 8 al 10 di Gennaio, e che la decade con temperatura media minima è, per tutte le stazioni d' Italia, la seconda di Gennaio. L' effetto medio delle cause di cui si tratta, per quello che riguarda il raffreddamento invernale dell' atmosfera, ha dunque massimo valore qualche tempo dopo che la declinazione solare ha raggiunto il suo minimo.

In conseguenza di ciò, negli anni in cui l' effetto di queste cause si manifesta con anticipo sensibile, concorreranno insieme i massimi effetti di queste cause e della declinazione e si avranno inverni freddi e precoci, e primavere relativamente miti.

Negli anni poi in cui l' effetto di quelle cause si manifesta con notevole ritardo, si avranno inverni troppo miti, primavere troppo fredde ed il minimo ed il massimo della temperatura, nell' anno, dovranno trovarsi ritardati.

Il medesimo si dica quando per punto di partenza, nella considerazione degli effetti di tali cause, si prendano le temperature estive anzichè le invernali.

Se adunque, in un anno determinato, la temperatura dell'inverno risulta notevolmente inferiore alla normale, è logico ammettere che quelle cause a cui si è accennato, si sieno presentate con sensibile anticipo, ed allora, per la periodicità supposta, anche nell'anno seguente dovremo aspettarle con poco dissimile anticipo e ne seguiranno le medesime conseguenze per le temperature medie delle stagioni e dell'anno.

Così continuerà anche per gli anni seguenti, fino a tanto che, o per la non perfetta periodicità annuale l'epoca in cui quelle cause si manifestano non sia nuovamente ricondotta alla normale, o che per ragioni accidentali, che qui è inutile ricercare, non avvenga una subita inversione nelle differenze di tempo in cui desse si manifestano.

Così si dica nel caso in che si abbia un inverno con temperature troppo elevate.

Tutte le leggi che noi abbiamo verificato sulla dipendenza del carattere termico delle stagioni, e quella tendenza al succedersi di stagioni con caratteri simili, rimangono così perfettamente spiegate.

Ho voluto accertare se nella serie da me osservata, anche gli spostamenti del minimo e del massimo annuali si trovavano verificati. Mi sono limitato all'esame di quegli anni in cui gli inverni ebbero temperature che si elevarono sulla normale per più dell'errore probabile.

Il ritardo previsto nel giorno del minimo, o nella decade con temperatura minima, si trova avverato 9 volte, su 10, e questi ritardi sono, quasi sempre, abbastanza notevoli; negli estati successivi poi il giorno del massimo, o la decade di temperatura massima si trovano parimenti ritardati 7 volte su 10.

Chimica. — *Sulla propilftalide e sua scissione per opera degli alcali caustici* [1]. Nota di Pietro Gucci, presentata dal Socio Cannizzaro.

In continuazione al mio studio *Sulla scissione delle ftalidi alchiliche per azione degli alcali caustici* [2], mi era proposto di vedere se la dipropilftalide si scindesse in acido benzoico e dipropilchetone (eptan4one, butirrone); ma non essendo nota la dipropilftalide, cercai di prepararla con metodo

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Siena.
[2] Rendiconti Lincei, vol. I, 1892, 2° sem., serie 5ª, pag. 260.

analogo a quello seguito da Kothe [1] per la dimetil- e la dietilftalide e da me già praticato. A tale scopo, per ogni preparazione, mischiai intimamente gr. 50 di anidride ftalica (boll. a 275-276°, B = 730) con gr. 50 di polvere di zinco privata il meglio possibile, dell' ossido e dell' umidità. Introdussi il miscuglio in un palloncino munito di refrigerante a riflusso e vi aggiunsi gr. 20 di joduro propilico normale (boll. a 101-105°) seccato col cloruro calcico di recente fusione. Applicai al refrigerante bolle ad acido solforico e scaldai a bagnomaria.

Si svolsero gas infiammabili e si raccolsero nelle bolle, esano e prodotti bollenti a più alta temperatura.

In dieci ore la reazione era compiuta. Applicando la chiusura a mercurio e scaldando il palloncino con soluzione satura di cloruro di sodio, la reazione si compiva in breve, però maggiore era la formazione dei gas e degli altri prodotti a scapito del rendimento. Non trovai neppure conveniente di operare con quantità maggiori d' ingredienti.

La massa contenuta nel palloncino, cavernosa e friabilissima a freddo, fu polverizzata e sottoposta alla distillazione in corrente di vapore, la quale procedè come per le altre due ftalidi summenzionate.

La sostanza, estratta coll' etere dal distillato e seccata col cloruro calcico, costituiva un olio giallognolo simile alla dietilftalide di Kothe, ma un po' più denso. Ogni preparazione me ne forniva, in media, due grammi.

Era assai difficile distillarla a pressione ridotta, poichè sussultava ad ogni istante malgrado i soliti artifizi. Sotto 220 mm. di pressione cominciava a distillare verso 238°, ma la più gran parte passava a 243-247° lasciando sempre un residuo bruno e denso. A pressione ordinaria invece (B = 735) distillava tranquillamente cominciando verso 285°, ma il più passava a 293-297°, lasciando un residuo nero semisolido.

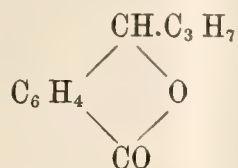
Col ripetere le distillazioni, in ambo i casi si allontanavano sempre di più i limiti di temperatura, e la decomposizione avveniva con leggero sviluppo gassoso apprezzato, nel primo caso, per mezzo della pompa a mercurio e, nel secondo, con una bolla ad acqua.

I distillati, raccolti a 243-247° (B = 220) e a 293-297° (B = 735), dettero all' analisi resultati simili. Le percentuali del primo risultarono 73,99 per il C e 6,91 per l' H; e quelle del secondo 74,01 per il C e 6,91 per l' H: ben lontane da quelle della dipropilftalide che sono 77,06 per il C e 8,26 per l' H.

Le frazioni raccolte a temperature inferiori contenevano ancora meno carbonio.

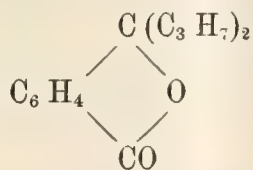
[1] Ann. 248-67.

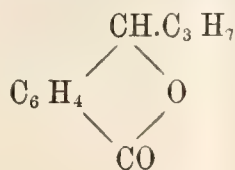
Tali resultati quindi deponevano più per la propilftalide

$$C_6H_4 \begin{matrix} \diagup CH.C_3H_7 \diagdown \\ \diagdown CO \diagup \end{matrix} O$$

contenendo questa per cento parti 75,00 di C e 6,82 di H. E che si trattasse veramente di tal composto, sebbene assai impuro, veniva dimostrato dallo scindersi cogli alcali caustici in acido benzoico e aldeide butirrica, ottenendosi benzoato e butirrato alcalino con svolgimento d'idrogeno, come più innanzi è descritto.

Ora, potendo provenire la propil- dalla dipropilftalide con eliminazione di propano per opera dell'idrogeno nascente, che si svolge nella distillazione a vapore, cercai di sottrarre all'azione di quest'idrogeno la dipropilftalide, che, analogamente alla dimetil- e alla dietilftalide poteva essersi formata. A tale scopo trattai, fino ad esaurimento, con etere distillato sul sodio il prodotto della reazione fra l'anidride ftalica, lo zinco e il joduro propilico, dopo averlo rapidamente frantumato; svaporai l'etere e sottoposi il residuo alla distillazione col vapor d'acqua; ma il prodotto risultò identico all'altro, come potei rilevare colla distillazione frazionata e coll'analisi elementare.

Durante la distillazione a vapore, fatta con apposito apparecchio, non potei apprezzare svolgimento di gas, che avrebbe dovuto essere propilene se la dipropil- fosse passata allora a propilftalide. Ora, la reazione fra l'anidride ftalica, lo zinco e il joduro propilico, pei piccoli rendimenti che dà, è evidentemente complicata, e non si può dire con sicurezza quale sia il meccanismo secondo cui si compie; tuttavia, tenuto conto che con analogo processo si ottengono la dimetil- e la dietilftalide e che v'ha tendenza a distaccarsi il propilene come più oltre è indicato, potrebbe forse affacciarsi anche l'ipotesi che nel caso presente si sia formata dapprima la ftalide dipropilica

$$C_6H_4 \begin{matrix} \diagup C(C_3H_7)_2 \diagdown \\ \diagdown CO \diagup \end{matrix} O$$

e che questa poi sia passata a ftalide monopropilica

$$C_6H_4 \begin{matrix} \diagup CH.C_3H_7 \diagdown \\ \diagdown CO \diagup \end{matrix} O$$

perdendo propilene.

Cercai di scoprire il propilene nell' acido solforico delle bolle trasformandolo coll'acqua a caldo, come insegna Berthelot [1], in alcool isopropilico, ma per i vari prodotti sciolti dall' acido solforico non ebbi resultati attendibili.

Tenterò la preparazione della dipropilftalide, con metodo analogo a quello con cui Wischin [2] preparò la dietilftalide, cioè col bicloruro di ftalile e lo zinco propile.

Visto che colla distillazione non era possibile depurare la sostanza, cercai, ma senza resultato, di farla cristallizzare, prima raffreddando con miscugli frigoriferi, e poi lasciando in riposo al freddo invernale, sia le varie porzioni di essa raccolte colla distillazione frazionata, sia il prodotto grezzo dopo averlo scaldato moderatamente nel vuoto e seccato col cloruro di calcio.

Il prodotto distillato a pressione ridotta conteneva ftalide, e l' altro, distillato a pressione ordinaria, ftalide e anidride ftalica cui asportai colla potassa e da questa estrassi coll' etere, previa acidificazione coll' acido cloridrico.

Il residuo etereo proveniente dal primo prodotto non reagiva affatto col carbonato sodico e cristallizzava nell' acqua calda in aghetti scolorati fusibili a 73° come la ftalide e come questa essi emanavano a caldo l' odore che ricorda, in qualche modo, quello delle mandorle amare; mentre il residuo etereo proveniente dall' altro prodotto si scioglieva parzialmente nel carbonato sodico con sviluppo di biossido di carbonio; e dalla soluzione sodica, acidulata con acido cloridrico, si separò l' acido ftalico che, dopo averlo fatto cristallizzare nell' acqua e seccato, si fondeva a 182-183° e poco al di sopra perdeva l' acqua lasciando l' anidride la quale si fondeva a 128-129° e colla resorcina dava la fluoresceina. La parte insolubile nel carbonato sodico era la ftalide che cristallizzata nell' acqua e seccata nel vuoto si fondeva a 73°.

L' anidride ftalica più volte si è cristallizzata nelle prime porzioni del distillato, in quelle raccolte fra 285-293°.

Più lenta procede la distillazione, tanto maggiore è la quantità sia della ftalide, distillando a pressione ridotta, sia di essa e dell' anidride ftalica, distillando a pressione ordinaria, che si ritrovano nei prodotti.

La ftalide potrebbe provenire dalla propilftalide per eliminazione di propilene sotto l' azione del calore e appunto il gas, che si svolge nella distillazione della propilftalide, brucia con fiamma luminosa similmente all' etilene e si combina a freddo col bromo formando una materia oleosa, che però non ho potuto riconoscere come bibromopropilene per la sua troppa esiguità. La ftalide poi secondo Goldschmidt [3] sopra 285° si trasformerebbe parzialmente in biftalile e di questo, sublimandosi all' aria, si decomporrebbe

(1) J. 1855, 611.
(2) Ann. 143-262.
(3) Mon. für Chemie 16-13.

una parte in anidride ftalica ed altri prodotti [1]. Ma io, fin' ora, non ho potuto afferrare il biftalile.

Ora, quella deficienza del carbonio e anche dell' idrogeno, rispetto alla composizione della propilftalide, poteva essere, almeno in parte, giustificata dalla presenza della ftalide, o di essa e dell' anidride ftalica nei campioni analizzati essendo le loro percentuali, in carbonio e idrogeno, assai più basse di quelle della propilftalide (per 100 parti: ftalide 71,64 di C e 4,47 di H; anidr. ftalica 64,86 di C e 2,70 di H); così raccolsi insieme i prodotti, circa gr. 5, già sbattuti colla soluzione di potassa e li lavai con acqua fino a scomparsa dell' alcalinità dopo, però, averli sciolti in poco etere perchè talquali si emulsionavano. Scacciato l' etere a bagnomaria, scaldai il residuo a 150°, prima a pressione ordinaria e poi nel vuoto finchè più nulla in apparenza si volatilizzava. Oltre acqua, distillò un pochino di un liquido scolorato con odore aromatico differente da quello della sostanza. Il prodotto però, in seguito al riscaldamento, era tornato a contenere minime quantità di ftalide, tuttavia, dopo averlo tenuto sul cloruro calcico di recente fusione, lo sottoposi all' analisi elementare e n' ebbi i seguenti resultati:

gr. 0,2872 di sost. dettero gr. 0,7837 di CO_2 e gr. 0,1829 di H_2O.

per $C_{11}H_{12}O_2$ (propilftalide) calcolato	trovato
C °/₀ 75,00	74,37
H 6,82	7,07

Quanto alla scissione in acido benzoico e aldeide butirrica, operai come appresso: introdussi in un palloncino, munito di refrigerante e di un collettore con tubo a svolgimento di gas, gr. 0,5 del prodotto distillato a 293-297° con gr. 2 di soda all' alcool, e scaldai aggiungendo acqua tanto che la soda si fondesse verso 150°. Quando la temperatura del bagno fu verso 200°, cominciò a raccogliersi l' idrogeno, che bruciava nel modo caratteristico; la maggior parte si svolse quando il bagno fu a 250°. Sostituito un bagno di piombo e stagno, scaldai fino verso 350°, ma già a 300° era cessato ogni segno di reazione. Non si svolse che idrogeno e non distillò che acqua con goccioline di sostanza inalterata; anzi trovai che conviene scaldare molto lentamente affinchè di questa non siano trasportate quantità cospicue dal vapor d' acqua.

Sciolsi coll' acqua calda il residuo del palloncino e ne acidulai il soluto, che era giallo brunastro, con acido cloridrico. Si separò l' acido benzoico e in pari tempo si manifestò intensissimo l' odore dell' acido butirrico. Esaurii con etere, ripresi poi il residuo etereo con acqua calda, decolorai con carbone animale e filtrai. Per raffreddamento si separò l' acido benzoico, che, raccolto

[1] Beilstein 1896, vol. II, pag. 1816.

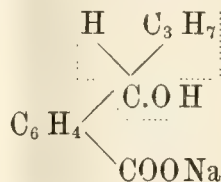
alla pompa, lavato con acqua fredda e seccato nel vuoto, pesava gr. 0,15 e si fondeva a 120,5-121°. Dalle acque madri, estraendo con etere, ricavai altro acido benzoico, che, cristallizzato nell' acqua e seccato, pesava gr. 0,08 e si fondeva a 120-121°. Queste due frazioni, fatte sublimare insieme a 100-110°, fornirono l' acido fondente a 120,5-121,5°, come l' ac. benzoico puro, lasciando un tenue residuo brunastro contenente acido ftalico che colla resorcina mi fornì la fluoresceina.

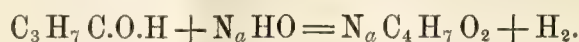
Quest' acido ftalico, in così minima quantità, credo possa solo provenire dall' anidride ftalica contenuta nel prodotto trattato e anche dalla ftalide, in esso pure contenuta, la quale, come altra volta dimostrai [1], nelle condizioni descritte si ossida ad acido ftalico.

In altra esperienza impiegai gr. 0,6 di prodotto depurato colla potassa, però ripresi il residuo etereo coll' acqua di barite, precipitai poi l' eccesso della barite col biossido di carbonio, filtrai e lavai il carbonato. Dal liquido complessivo, svaporato a piccolo volume, precipitai con acido cloridrico diluito l' acido benzoico, che raccolto alla pompa, lavato e tenuto sull' acido solforico fino a peso costante, era gr. 0,13. Dalle acque madri, insieme a quelle di lavaggio, trattate con acido cloridrico dopo averle alcalizzate e concentrate assai, ne ricavai altro, che, lavato e seccato, pesava gr. 0,04. In tutto gr. 0,17 (calcol. gr. 0,2). Queste due frazioni, fatte sublimare a 100-110°, lasciarono un tenuissimo residuo che dava appena sensibile la solita reazione dell' acido ftalico. Il sublimato si fondeva a 116-118° e dopo una seconda sublimazione, a 120-121°.

Alcune gocce poi delle acque madri dell' acido benzoico, che avevano odore pronunziatissimo d' acido butirrico, bastavano per dare, molto intenso, l' odore caratteristico di ananasso scaldandole con alcool ed acido solforico.

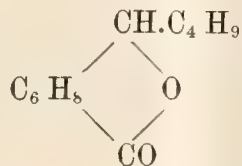
Dunque l' ortoossibutilbenzoato sodico, che si forma per l' azione della soda sulla propilftalide, si scinde, può dirsi quantitativamente, in bezoato sodico e aldeide butirrica secondo lo schema:

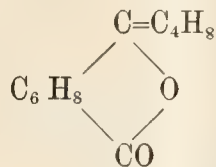
$$C_6H_4\begin{cases} C.OH\begin{cases}H\\C_3H_7\end{cases} \\ COONa\end{cases}$$

e l' aldeide poi, colla soda eccedente, si ossida ad acido butirrico, secondo l' equazione:

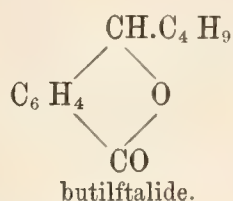
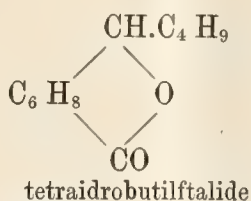
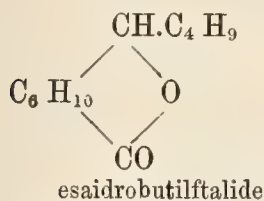
$$C_3H_7\,C.O.H + N_aHO = N_aC_4H_7O_2 + H_2.$$

Sostituendo la potassa alla soda non ho riscontrato di diverso che la formazione di quantità più sensibili d' acido ftalico.

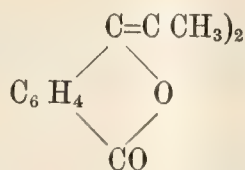
[1] Rendiconti Lincei, vol. I, 1892, 2° sem., serie 5ª, pag. 260.

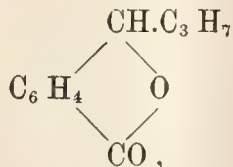
Mentre accudiva alla depurazione del mio prodotto, comparve sui Rendiconti della R. Acc. dei Lincei [1] la Nota di G. Ciamician e P. Silber *Sui principî aromatici dell' essenza di sedano*, in cui gli autori fanno rilevare che le ftalidi monoalchiliche hanno, in vario grado, l' odore del sedano indipendentemente dal grado di saturazione dell' anello esatomico fondamentale, come la sedanolide (tetraidrobutilftalide)

$$\begin{array}{ccc} & CH.C_4H_9 & \\ C_6H_8 & & O \\ & CO & \end{array}$$

e l' anidride dell' acido sedanonico

$$\begin{array}{ccc} & C{=}C_4H_8 & \\ C_6H_8 & & O \\ & CO & \end{array}$$

da loro rinvenute nell' essenza di sedano e qualificate come i principî aromatici di essa; e la serie:

esaidrobutilftalide — tetraidrobutilftalide — butilftalide.

Inoltre fanno menzione dell' isopropilidenftalide di Roser

$$\begin{array}{ccc} & C{=}C\,CH_3)_2 & \\ C_6H_4 & & O \\ & CO & \end{array}$$

e massime del suo prodotto d' idrogenazione, a cui dicono spetti probabilmente la formula

$$\begin{array}{ccc} & CH.C_3H_7 & \\ C_6H_4 & & O \\ & CO\,, & \end{array}$$

[1] Vol. VI, 1897, 1° sem., serie 5ª, fasc. 11.

come composti dotati di un odore che ricorda quello dell' essenza di sedano.

Anche la propilftalide da me ottenuta, specialmente stropicciata fra le dita, ha un odore assai intenso che ricorda subito quello del sedano.

Mi sono messo a studiare l'azione del joduro isopropilico sull'anidride ftalica in presenza di polvere di zinco.

Mineralogia. — *Notizia sopra alcune specie minerali nuove per la Sardegna.* Nota di DOMENICO LOVISATO, presentata dal Socio STRUEVER.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio STRÜVER, relatore, a nome anche del Corrisp. SPEZIA legge una Relazione sulla Memoria del prof. L. FANTAPPIÈ intitolata: *Sui proietti minerali vulcanici trovati nell'altipiano tufaceo occidentale dei Vulsinii, da Farnese a S. Quirico e Pitigliano,* concludendo col proporre l'inserzione del lavoro negli Atti accademici.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice poste ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario TOMMASI-CRUDELI presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci BASSANI, BAZIN, DARWIN e WEBER.

Il Socio STRÜVER fa omaggio di due pubblicazioni dell'ing. R. MELI, intitolate: *Bibliografia della città di Viterbo* e *Relazioni sommarie delle escursioni geologiche eseguite con gli allievi della scuola degl'Ingegneri di Roma durante l'anno accademico 1891-92* e discorre di entrambe.

CORRISPONDENZA

Il Segretario TOMMASI-CRUDELI dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Scuola Navale di Genova; l'Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la Società di scienze naturali di Emden; l'Università di Tokyo; l'Ufficio per la misura del grado, di Vienna.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il Ministero della Guerra; l'Istituto geografico militare e il R. Istituto di studi superiori di Firenze; le Società di scienze naturali di Bautzen e di Francoforte s. M.; l'Istituto geografico militare di Vienna.

COMITATO SEGRETO

Il Presidente Beltrami annuncia alla Classe che la Federazione italiana dei Concorsi agrari aprì sin dal 1896 un concorso ad un premio per uno studio che concludesse colla proposta di un metodo efficace, semplice e non troppo dispendioso, con cui fosse dato di accertare le adulterazioni dei perfosfati delle ossa con altri perfosfati, delegando una Commissione nominata dalla R. Accademia dei Lincei ad esaminare i lavori presentati al concorso e a pronunciare su di essi un giudizio inappellabile. Il Presidente aggiunge che tale esame fu recentemente compiuto, e che la Commissione, composta dei Soci Cannizzaro, Cossa A. (relatore) e Paternò, ha trasmesso alla Presidenza la sua Relazione.

Il Socio Cannizzaro, a nome anche dei Colleghi, dà lettura delle conclusioni di questa Relazione, della quale la Classe prende atto.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 aprile 1898.

Alessi C. — Sviluppo della colonna vertebrale nei clupeidi. Avola, 1898. 8°.

Bassani F. — Aggiunte all'Ittiofauna eocenica dei Monti Bolca e Postale. Pisa, 1897. 4°.

Bazin H. — Étude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts. Paris, 1898. 8°.

Boccardo E. C. e *Baggi V.* — Trattato elementare di geometria pratica. Disp. 55. Torino 1898. 8°.

Brusina S. — Materiaux pour la Faune malacologique néogène de la Dalmatie, de la Croatie et de la Slavonie etc. Zagreb, 1897. 4°.

Caldarera F. — Sulle equazioni lineari ricorrenti trinomie ecc. Napoli, 1897. 8°.

Carulla F. J. R. — An undescribed phenomenon in the fusion of mild steel. London, 1891. 8°.

Id. — On the agricultural value of sulphate of ammonia from blast-furnaces. London, 1897. 8°.

Id. — The corrosion of iron by raw tar. London, 1896. 8°.

Id. — The recovery of sulphur from hydrogen sulphide. London, 1897. 8°.

Id. — The use of « Chemical » Lead. London, 1893. 4°.

Cayley A. — The collected mathematical papers. Supplementary volume. Cambridge, 1898. 4°.

D'Achiardi G. — Due esempi di metamorfismo di contatto (Urali-Elba). Pisa, 1898. 8°.

Id. — Sul contegno ottico della fluorina di Gerfalco e del Giglio. Pisa, 1897. 8°.

Darwin G. H. — Periodic Orbits. Stockholm, 1897. 8°.

Delitala G. — Contributo allo studio del problema di Pothenot. Torino, 1898. 8°.

Meli R. — Bibliografia della città di Viterbo. Part. I e II. Roma, 1894-97. 8°.

Id. — Relazioni sommarie delle escursioni geologiche eseguite con gli allievi della r. Scuola di Applicazione per gli ingegneri di Roma nell'anno scolastico 1891-92. Roma, 1893-97. 8°.

Motta Coco A. — Il Coli bacillo ed i cocchi piogeni nell' etiologia delle febbri intestinali. Milano, 1898. 8°.

Re F. — La teoria dei raggi Röntgen. Palermo, 1898. 8°.

Weber H. — Lehrbuch der Algebra. Bd. I. 2e Aufl. Braunschweig, 1898. 8°.

P. B.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 aprile 1898.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Dell'azione dei tubi opachi sui raggi X.* Nota del Socio Emilio Villari [1].

In altra mia Nota dimostrai, che i raggi X passando per dei tubi opachi perdono buona parte della loro virtù scaricatrice [2]. In questo scritto esporrò, in breve, i risultati di ulteriori mie indagini eseguite sullo stesso soggetto.

Per studiare il fenomeno adoperai un Crookes a pera chiuso in una cassa di piombo a grosse pareti che, insieme ad un energico rocchetto eccitatore, era rinchiusa in un'ampia cassa di zinco comunicante coi tubi del gas. Le due casse, di contro all'anticatodo, erano addossate l'una all'altra, ed in corrispondenza di esso avevano un foro di circa 10 cm. Quello esterno della cassa di zinco, era chiuso con una lastra di alluminio grossa 0,3 mm. Così le induzioni perturbatrici erano affatto eliminate, e gli X venivano fuori dalla sola lastra di alluminio, come potei assicurarmi da esperienze dirette. L'elettroscopio aveva una sola foglia d'oro, era isolato con paraffina così bene da non perdere di carica, in modo sensibile, per alcuni minuti, ed era situato a 110 cm. dal Crookes. Le esperienze furono fatte misurando la durata della scarica prodotta dagli X, interponendo o no, fra il Crookes e l'elettro scopio un tubo sottile di zinco di 100 × 10 cm. Ecco alcuni fra i varî risultati ottenuti.

Esperienze senza tubo:

E perde	1°	in	2″,6
	5	»	10″,5
	10	»	25″,0

(1) Inviata l'8 aprile 1898.

(2) Rendiconti Lincei 15 luglio 1896.

Esperienze col tubo interposto:

E	perde	1°	in	7″,0
		5	»	31″,0
		10	»	66″,0

Ripetei le medesime esperienze con una canna di vetro a grosse pareti, lunga 110 cm., di 9 cm. di diametro verso il Crookes ed 8,5 verso l'elettroscopio. Essendo questa canna più stretta dell'anticatodo, limitai la parte radiante di esso con una lastra di piombo con un foro di circa 8 cm., per avere sempre il medesimo fascio degli X operante sull'elettroscopio, interponendo o no la canna di vetro. Ecco alcuni fra i molti numeri ottenuti:

Esperienze senza la canna:

E	perde	1°	in	3″,0
		5	»	12″,0
		10	»	27″,0

Esperienze con la canna interposta:

E	perde	1°	in	12″,0
		5	»	53″,0
		10	»	1′56″,0

Da queste varie esperienze risulta, che interponendo il tubo di zinco la durata della scarica diventa tripla, ed interponendo la canna di vetro la scarica dura oltre il quadruplo di quella che si ha senza tubi. L'effetto maggiore della canna di vetro è, forse, dovuto all'essere essa alquanto più lunga e stretta del tubo di zinco.

L'effetto dei tubi s'accresce oltre misura restringendone l'apertura vicina all'elettroscopio. Alla canna di vetro precedente, fig. 1, adattai, con

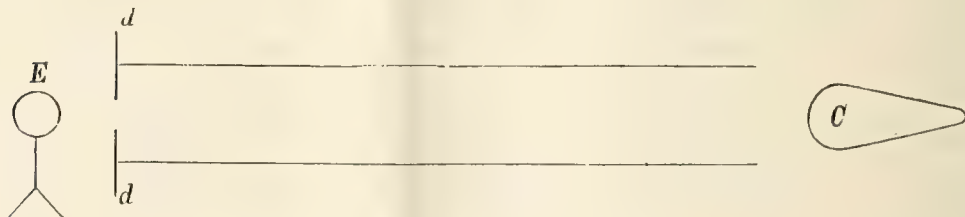



Fig. 1.

mastice, un grosso disco di vetro, *dd*, con un foro centrale di 25 mm. in corrispondenza alla pallina dell'elettroscopio E, di 20 mm.; così che questa riceveva sempre la medesima radiazione del Crookes C, vi fosse o no interposta la canna col disco. Il gambo dell'elettroscopio era ricoperto di grosso strato di paraffina, che, come dimostrai altra volta, ne impedisce la scarica

anche se investito dagli X. Le misure di confronto dettero i risultati che seguono:

Gradi di scarica	Durata della scarica		
	Senza tubo nè disco	Col solo tubo	Col tubo e col disco
1°	3″	10″	48″
5	10	47	4′21″
10	22	100	9′41″

Cioè la scarica col solo tubo si rallenta da 4 a 5 volte, e col tubo ed il disco da 26 a 27 volte della scarica senza tubo nè disco.

Per darsi ragione di questa singolare azione dei tubi bisogna supporre, o che questi scemano l'energia dei raggi, lo che non pare, come vedremo in seguito, ovvero che alla scarica dell'elettroscopio concorrano non solo i raggi che vi arrivano in linea retta dal Crookes, ma ancora, ed assai energicamente, quelli laterali divergenti, che vengono appunto arrestati dai tubi opachi. Una tale spiegazione viene confermata, fra le altre, dalle esperienze che seguono.

Costruii un tubo di carta, eguale a quello precedente di zinco (100 × 10 cm.), e ne confrontai gli effetti interponendoli, l'un dopo l'altro, fra il Crookes e l'elettroscopio. Ecco le medie di varie misure incrociate e concordi:

	Durata della scarica di 10°
Senza alcun tubo	33″
Col tubo di carta	58″
Col tubo di zinco	85″

Vedesi che col tubo di carta la scarica è molto più rapida che con quello di zinco, perchè i raggi attraversano bene le pareti del tubo di carta e poco quelle sottili del tubo di zinco.

In una seconda esperienza interponevo, a 90 cm. dal Crookes ed a 10 dall'elettroscopio, una lastra di piombo (40 × 40 × 0,5 cm.), ora intiera, ora con un foro di 37 mm. nel mezzo, il quale veniva centrato col Crookes e con l'elettroscopio, ed ora sperimentavo senza alcune lastre interposte. Le misure dettero le medie che seguono:

	Durata della scarica di 1°
Senza alcuna lastra	5″
Con lastra intiera	5′50″
Con lastra forata	2′25″

Senza lastre la scarica è rapidissima, e si rallenta oltremisura quando s'interpone la lastra forata. Questa intercettando i soli raggi laterali divergenti, mostra che essi debbono concorrere, e molto, a produrre la scarica. La scarica si rallenta ancora di più (1° in 5′50″) se s'interpone la lastra

senza foro, lo che è naturalissimo, giacchè in questo caso non pervengono allo elettroscopio nè i raggi diretti, nè quelli divergenti. Ma se con un ventaglio si soffia sull' elettroscopio l' aria circostante, attraversata ed attivata dagli X laterali, la scarica si accelera di molto, anzi giova notare, che in coteste esperienze è necessario stare assai discosti dall' elettroscopio, per evitare che l' aria attivata dagli X e smossa dallo sperimentatore, venga a colpire l' elettroscopio e scaricarlo.

Da ultimo, come a complemento della precedente esperienza, riferisco la seguente. Situai un disco di piombo di 4 cm. di diametro e grosso 5 mm. a 4 cm. dalla pallina dell' elettroscopio, che era di 2 cm., in modo che l'elettroscopio rimaneva completamente all' ombra degli X. Misurai la durata della scarica provocata dalle radiazioni, intercettandole o no col disco, ed ebbi i risultati che seguono:

Valore delle scariche	Durata delle scariche	
	Col disco	Senza disco
1°	3″,5	3″,0
2	5″,5	5″,0
3	7″,7	7″,7
4	9″,9	8″,4
5	12″,0	10″,4

Così, la scarica dell' elettroscopio riparato col disco dai raggi diretti, è appena più lenta di quella prodotta senza il disco; per cui la scarica è dovuta poco ai raggi diretti e quasi per intiero a quelli laterali e divergenti.

Queste diverse esperienze mostrano, mi pare, in modo sicuro, che alla scarica concorrono i raggi diretti e quelli divergenti, in quanto attivano l'aria che attraversano; la quale poi investe l' elettroscopio e ne disperde l' elettricità.

Dopo di ciò restava a studiare se i raggi, passando pei tubi patissero o no alcuna variazione nella loro intensità; ed in queste nuove indagini mi servii della fotografia. Sostituii all' elettroscopio una lastra Lumière (13 × 18), chiusa nella sua cassetta e posta, ben centrata, a 115 cm. dal solito Crookes. A meglio apprezzare le differenze di tinte delle fotografie, ricoprii la Lumière con una lastra di piombo di 3 mm. di spessezza, avente un foro centrale di 8 cm. traversato da una striscia della stessa lastra, come nella fig. 2. Esposta la Lumière alle radiazioni, eseguii varie coppie di fotografie sulle due metà di una stessa lastra tagliata in due. Ciascuna coppia eseguivasi con una medesima posa, ed una delle due fotografie prendevasi con l' interposizione del tubo, l' altra senza di esso. Inoltre, per pormi sempre più in condizioni simili nell' eseguire ciascuna coppia, presi la 1ª fotografia della I coppia interponendo il tubo e la 2ª senza di esso: indi eseguii la 1ª foto-

grafia della II coppia senza tubo e la 2ª col tubo; e così seguitando. Naturalmente le due lastre di ciascuna coppia venivano sviluppate insieme.

Dall' esame fatto da più persone su 4 coppie di fotografie ottenute col solito tubo di zinco o senza di esso, risultò che ambedue le prove della I

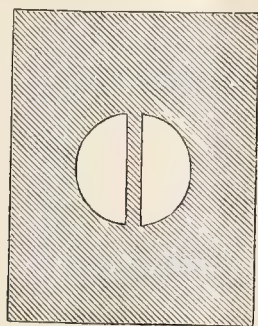



Fig. 2.

e III coppia (con 20′ e 10′ di posa, relativamente) erano di eguali intensità. Della II coppia (con 15′ di posa) sembrava, forse, un poco più oscura la prova ottenuta col tubo; e di quelle della IV coppia (5′ di posa) apparve, forse, più oscura quella ottenuta senza il tubo.

Ripetei le medesime esperienze intercalando o no la solita canna di vetro, dopo avere limitato, come dissi, con lastra di piombo con foro di 8 cm. circa di diametro, l'anticatodo radiante. Della I coppia, con 12′ di posa parve, forse, un pochino più oscura la prova ottenuta senza la canna; della II coppia (12′ di posa) sembrò, forse, più oscura la prova ottenuta interponendo la canna. Le ricordate differenze però, se pure reali, erano minime e malsicure.

Ad apprezzare la squisitezza o sensibilità di queste misure fotografiche, interposi la canna di vetro tra il Crookes e la lastra, e feci operare su questa per 12′ le radiazioni di quello. Indi coprii la metà della cassetta contenente la lastra con una grossa piastra di piombo, e prolungai l'azione degli X, in una prima esperienza per altri 2′; in una seconda per 1′; ed in una terza per soli 30″. Così, sulla mezza lastra coperta l'azione dei raggi durò costantemente 12′; e sull'altra metà durò 12′ + 2′, 12′ + 1′, 12′ + 30″. Sviluppate le lastre risultò, che la metà stata coperta, cioè esposta per soli 12′ alle radiazioni, era sempre meno oscura dell'altra. La differenza, minima, che pure appariva netta e distinta sotto speciale incidenza di luce, osservavasi, come è naturale, fra le due mezze fotografie ottenute con 12′ e 12′ + 30″ di posa. D'onde può dirsi che il metodo fotografico permette di svelare una differenza di radiazione di circa $^1/_{24}$ dell'intensità totale.

In conclusione, da queste esperienze risulta che i raggi X attraversando lunghi tubi opachi non acquistano nè scemano, in modo sensibile, la loro virtù fotografica. Da ciò due conclusioni. La prima è, che detti raggi non

si riflettono o diffondono sensibilmente nell' interno dei tubi che percorrono; e la seconda è, che gli X, attraversando i tubi, non perdono, punto della loro efficacia fotografica, ed assai probabilmente non vi perdono neanche della loro virtù scaricatrice; viene così, in via indiretta, riconfermata la spiegazione data dell' azione dei tubi sulla scarica dell' elettroscopio.

Matematica. — *Sulla risoluzione approssimata delle equazioni alle differenze.* Nota del Corrispondente S. PINCHERLE.

È noto il metodo di Bernouilli per la ricerca approssimata delle radici di un' equazione algebrica, mediante il rapporto di due somme consecutive di potenze simili. Nella presente communicazione, espongo un metodo informato allo stesso principio e che serve a sostituire, in via approssimata, l' integrale di un' equazione lineare alle differenze finite del primo ordine a quello di un' equazione lineare di ordine qualunque.

1. Abbiasi l' equazione alle differenze finite

$$(1)\quad \varphi(x+n)+\alpha_1(x)\varphi(x+n-1)+\cdots+\alpha_{n-1}(x)\varphi(x+1)+\alpha_n(x)\varphi(x)=0,$$

e se ne rappresenti con $F(\varphi)$ il primo membro, forma lineare alle differenze; accanto a questa si consideri l' altra

$$(2)\quad \begin{aligned} \alpha_n(x+n)\,\varphi(x+n)+\alpha_{n-1}(x+n-1)\,\varphi(x+n-1)+\cdots \\ +\alpha_1(x+1)\,\varphi(x+1)+\varphi(x)=0, \end{aligned}$$

e si rappresenti con $F_1(\varphi)$ il suo primo membro, che è detto *forma aggiunta* di F [1]. Sia

$$(3)\quad \mu_1\,,\,\mu_2\,,\,\ldots\,\mu_n$$

un sistema fondamentale d' integrali di $F_1=0$; è noto che un sistema fondamentale

$$(4)\quad \omega_1\,,\,\omega_2\,,\,\ldots\,\omega_n$$

di integrali di F si ottiene dagli elementi reciproci della prima linea del determinante

$$\begin{vmatrix} \mu_1(x-n+1) & \mu_2(x-n+1) & \ldots & \mu_n(x-n+1) \\ \mu_1(x-n+2) & \mu_2(x-n+2) & \ldots & \mu_n(x-n+2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_1(x) & \mu_2(x) & & \mu_n(x) \end{vmatrix}$$

[1] Ho considerato già da tempo (v. p. es. Mem. dell' Accad. di Bologna, serie IV, tomo X, 1890) l' equazione (2) accanto alla (1), che dicevo sua *inversa*. Le proprietà della forma aggiunta di una data si trovano svolte in una Nota del prof. Bortolotti (questi Rendiconti, serie V, tomo V, pag. 349, 1896).

divisi per il determinante stesso; è pure noto che gli integrali (3) di F_1 sono i moltiplicatori di F, sono cioè tali che

$$\mu_i F = \varDelta G_i \,, \quad (i = 1, 2, \dots n) \tag{5}$$

essendo $\varDelta$ il simbolo della differenza finita e G_i una forma lineare d'ordine $n-1$ (1). Risulta subito, per le (5), che le G_i sono le forme determinate da

$$G_i(\omega_k) = \begin{cases} 0 & \text{per } i \gtrless k \\ 1 & \text{»} \;\; i = k, \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots n);$$

se dunque si vuole determinare una forma lineare $P(\varphi)$ alle differenze, dell'ordine $n-1$, che assuma per $\varphi = \omega_i$ la determinazione $\beta_i (i = 1, 2, \dots n)$, essa sarà data da

$$P(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i G_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varDelta^{-1} \mu_i F(\varphi). \tag{6}$$

La formula così ottenuta è una formula di *interpolazione*, che si presenta, nello studio delle forme lineari alle differenze, come l'equivalente della nota formula di Lagrange per le funzioni razionali intere.

Se nella (6) si muta la F nella sua inversa F^{-1}, viene

$$PF^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varDelta^{-1} \mu_i \varphi \text{ (2)};$$

in particolare, se si fa $P = 1$, si ha per F^{-1} l'espressione

$$F^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \varDelta^{-1} \mu_i \varphi. \tag{7}$$

2. Posto, secondo una notazione usuale, $\theta\varphi(x) = \varphi(x+1)$, si ha per $\varDelta^{-1}$ lo sviluppo formale

$$\varDelta^{-1}\varphi = -\varphi - \theta\varphi - \theta^2\varphi - \cdots - \theta^\nu\varphi - \cdots,$$

questo sviluppo acquista poi significato effettivo se si sceglie la funzione φ in una classe — o campo funzionale — opportuna. Ad esempio, si possono prendere tutte le funzioni che in una striscia del piano x parallela all'asse reale, si mantengono in valore assoluto inferiori ad $a^{R(x)}$, dove a è un numero positivo minore d'uno ed $R(x)$ è la parte reale di x.

(1) Bortolotti, loc. cit.

(2) Questa formula può, nell'algebra delle forme alle differenze finite, riguardarsi come l'analoga di quella che, nella teoria delle funzioni razionali, dà la scomposizione di un quoziente in frazioni semplici.

Applicando lo sviluppo trovato alla formula (7), φ essendo preso in un campo funzionale conveniente, la cui considerazione, per altro, non ha importanza in ciò che segue, si avrà per F^{-1} lo sviluppo

$$(8) \qquad F^{-1}\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \theta^\nu \mu_i \, \theta^\nu \varphi \, ,$$

in cui il coefficiente di $\theta^\nu \varphi$

$$(8') \qquad \lambda_\nu = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \theta^\nu \, \mu_i$$

rimane manifestamente inalterato se alle $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ si sostituisce un altro qualunque sistema fondamentale d'integrali di F e alle $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ il sistema corrispondente di moltiplicatori, le ω_i e le μ_i essendo fra loro controgredienti ([1]). Da questa proprietà invariantiva delle λ_ν e dall'applicazione di un noto teorema di Appell, il quale è stato dato per le forme differenziali lineari ([2]), ma la cui estensione alle forme lineari alle differenze non presenta la minima difficoltà, risulta che le λ_n si possono esprimere razionalmente in funzione dei coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ della forma F e delle $\theta\alpha_1, \theta^2\alpha_1, \dots$. Queste espressioni si possono calcolare per via ricorrente ([3]) e siano esse

$$(9) \qquad \lambda_\nu = \lambda_\nu(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \theta\alpha_1, \theta\alpha_2, \dots) \, .$$

3. Si faccia ora l'ipotesi che i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ di F tendano, quando x va all'infinito nella direzione dell'asse reale del suo piano e nel senso positivo, ai limiti rispettivi $a_1, a_2, \dots a_n$. Allora, per un noto teorema del Poincaré ([4]), gl'integrali $\mu_i(x)$ dell'equazione (2) sono tali che

$$\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{\mu_i(x+\nu+1)}{\mu_i(x+\nu)} \right|$$

è uguale al modulo di una delle radici dell'equazione

$$(10) \qquad a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + 1 = 0$$

ed in generale, al massimo di questi moduli. Supposto ora che fra le radici

([1]) Bortolotti, loc. cit.

([2]) Annales de l'École normale, serie II, tomo X, 1881. Cfr. anche Schlesinger, *Handbuch der lin. Differentialgleich.* Bd. I, pag. 38. Leipzig, Teubner, 1895.

([3]) V. la mia *Algebra delle forme lineari alle differenze,* parte 3ª, Mem. dell'Accad. di Bologna, serie V, tomo V, 1895.

([4]) American Journal of Math., tomo VII, 1884.

della (10), che si diranno $y_1, y_2, \dots y_n$, ve ne sia una y_1 il cui modulo superi quello delle altre,

$$|y_1| > |y_2| \geq |y_3| \dots \geq |y_n|;$$

è noto che fra i sistemi fondamentali della (2) è possibile di trovarne uno, $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots \bar{\mu}_n$, tale che sia

$$\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{\bar{\mu}_i(x+\nu+1)}{\bar{\mu}_i(x+\nu)} \right|$$

uguale ad $|y_1|$ per $i=1$, e per $i=2, 3, \dots n$, uguale ad un altro dei moduli $|y_2| \dots |y_n|$. Sia $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots \bar{\omega}_n$ il corrispondente sistema d'integrali della (1). Per la proprietà invariantiva delle λ_ν è affatto indifferente il sistema di integrali e di moltiplicatori con cui si immaginano formate le loro espressioni (8′), mentre quelle che sono da costruire effettivamente sono le espressioni razionali (9). Scrivendo dunque

$$\lambda_\nu = \sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_i \, \theta^\nu \bar{\mu}_i$$

se ne dedurrà

$$\frac{\lambda_\nu}{\theta\lambda_{\nu-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_i \, \theta^\nu \bar{\mu}_i}{\sum_{i=1}^{n} \theta\bar{\omega}_i \, \theta^\nu \bar{\mu}_i}$$

ossia

$$\text{(11)} \qquad \frac{\lambda_\nu}{\theta\lambda_{\nu-1}} = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_1 \dfrac{\theta^\nu \bar{\mu}_2}{\theta^\nu \bar{\mu}_1} + \cdots + \bar{\omega}_n \dfrac{\theta^\nu \bar{\mu}_n}{\theta^\nu \bar{\mu}_1}}{\theta\bar{\omega}_1 + \theta\bar{\omega}_2 \dfrac{\theta^\nu \bar{\mu}_2}{\theta^\nu \bar{\mu}_1} + \cdots + \theta\bar{\omega}_n \dfrac{\theta^\nu \bar{\mu}_n}{\theta^\nu \bar{\mu}_1}}.$$

Ma per le ipotesi fatte sulle μ_i, risulta che è

$$\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{\mu_i(x+\nu+1)}{\mu_i(x+\nu)} : \frac{\mu_1(x+\nu+1)}{\mu_1(x+\nu)} \right| < 1$$

per $i=2, 3, \dots n$, onde segue

$$\lim_{n=\infty} \frac{\theta^\nu \mu_i}{\theta^\nu \mu_1} = 0, \quad (i=2, 3, \dots n).$$

Se ora si passa al limite, nella (4), per $\nu=\infty$, viene

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\lambda_\nu}{\theta\lambda_{\nu-1}} = \frac{\bar{\omega}_1}{\theta\bar{\omega}_1};$$

segue da ciò che se consideriamo la (11) per valori di ν abbastanza grande, il suo primo membro, razionalmente esprimibile, mediante le (9), in funzione dei coefficienti di F, ci darà un' espressione approssimata per $\bar{\omega}_1 : \theta\bar{\omega}_1$, cioè la ω_1 ci sarà data, in via approssimata, come integrale di una equazione alle differenze del primo ordine: ed era questo appunto lo scopo che ci eravamo proposto.

Sarebbe interessante di tentare una estensione dello stesso metodo alle equazioni differenziali lineari.

Matematica. — *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Nota di Federigo Enriques, presentata dal Socio Cremona.

1. I caratteri di una superficie algebrica: *genere superficiale, numerico e geometrico, genere lineare e bigenere* (1), verranno denotati rispettivamente con p_n, p_g, $p^{(1)}$, P.

Studieremo superficie
$$z^2 = f(xy),$$
ossia *piani doppi* $\{xy\sqrt{f(xy)}\}$, dove la *curva di diramazione* $f(xy) = 0$, se pure riducibile, può supporsi non contenere parti multiple.

Abbiamo dimostrato che per una superficie qualunque si ha
$$P \geq p_n + p^{(1)}$$
purchè esista sopra la superficie una effettiva *curva canonica* (d'ordine > 0), e risulta anche
$$P \leq p_g + p^{(1)}$$
se $p^{(1)} > 0$.

Abbiamo già determinato (2) tutti i piani doppi pei quali
$$p_n = P = 1$$
(e quindi anche $p_g = p^{(1)} = 1$), cioè i piani doppi che corrispondono a superficie di genere superficiale 1 sopra le quali *manca* la curva canonica.

Ci proponiamo ora di indicare, in questa Nota, la classificazione dei piani doppi per cui
$$p^{(1)} = 1 \quad \text{e} \quad P > 1,$$
fra i quali rientrano i piani doppi di genere superficiale 1 possedenti una effettiva curva canonica ellittica. La classificazione s' intende fatta assegnando i *tipi* cui i nominati piani doppi $\{xy\sqrt{f(xy)}\}$ possono ricondursi con una trasformazione birazionale su x, y.

(1) Cfr. il cap. VI della mia *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche*. Memorie della Soc. It. d. Scienze, 1896; oppure: Castelnuovo e Enriques, *Sur quelques récents résultats*... Mathematische Annalen, Bd. 48.

(2) *Sui piani doppi di genere uno*. Memorie della Soc. It. d. Scienze, 1896.

I tipi dei piani doppi di genere lineare $p^{(1)}=1$ e bigenere $P>1$, sono i seguenti:

I. *Piani doppi con curva di diramazione* C_{2n}, *d'ordine* $2n (n>3)$, *dotata d'un punto* O $(2n-4)^{plo}$ *o* $(2n-3)^{plo}$ *e*

1) nessun' altra singolarità

$$p_n=p_g=n-2 \qquad P=2n-5;$$

2) un punto 4^{plo} distinto da O

$$p_n=p_g=n-3 \qquad P=2n-6;$$

3) r coppie di punti 3^{pli} infinitamente vicini allineate con O (che è essenzialmente $(2n-4)^{plo}$) sopra rette facenti parte di C_{2n}

$$p_n=n-2-r, \qquad p_g=p_n \text{ o } p_g=0, \qquad P=2n-5-r;$$

4) r punti 4^{pli} infinitamente vicini ad O $(2n-4)^{plo}$, o r punti 3^{pli} infinitamente vicini ad O $(2n-3)^{plo}$ $(3r \leq 2n-3)$

$$p_n=p_g=n-2-r \qquad P=2n-5-2r;$$

5) r punti 4^{pli} infinitamente vicini ad O (essenzialmente $(2n-4)^{plo}$) ed inoltre h (>0) coppie di punti 3^{pli} infinitamente vicini ad O sopra rette per O facenti parte di C_{2n} $(4r+3h \leq 2n-4)$

$$p_n=p_g=n-2-r-h \qquad P=2n-5-2r-h.$$

II. *Piani doppi di cui la curva di diramazione si compone di* r *curve* C_{3s} *con 9 punti* s^{pli} *comuni (appartenenti ad un fascio di Halphen), ed eventualmente anche (per* r, s *dispari ed* $s>1$*) della cubica* C_3 *che passa pei 9 punti*:

$$p_n=1 \qquad p_g=\left[\frac{r+1}{2}\right]$$

$$P=\frac{3r-4}{2} \quad \text{per } s=1 \quad (r \text{ pari}),$$

$$P=\left[\frac{3r}{2}\right] \quad \text{per } s=2$$

$$P=\left[\frac{3r+1}{2}\right] \quad \text{per } s=3$$

$$P=\left[\frac{3r+2}{2}\right] \quad \text{per } s>3.$$

Viene qui designato in generale col simbolo $[\varrho]$ il massimo intero contenuto nel numero ϱ.

È notevole il fatto mostrato dagli esempi in cui $P>p_g+p^{(1)}$, fatto che non ha riscontro per $p^{(1)}=1$.

Si osservino in particolare nella categoria I i piani doppi del tipo 3, di genere 0 o 1, aventi il bigenere $P=n-r$ o risp. $P=n-6$; il conto delle costanti ne prova l'effettiva esistenza almeno per $n \leq 16$ o risp. $n \leq 27$.

Per $n = 5$ si ottiene un piano doppio del tipo 3 che non rientra nelle condizioni dell' enunciato, ma offre esempio di una superficie coi generi $p_n = -1 \quad p_g = 0$ di cui il bigenere vale $P = 1$, la quale non può quindi essere riferita ad una rigata ellittica come le superficie note fin qui coi caratteri $p_n = -1 \quad p_g = 0$.

2. Alla ricerca dei piani doppi che hanno i caratteri assegnati

$$(p^{(1)} = 1 , \quad P > 1) ,$$

dobbiamo far precedere alcune osservazioni relative alla determinazione delle curve canoniche e bicanoniche di un piano doppio di cui è data la curva di diramazione C_{2n} (d' ordine $2n$).

Le immagini delle curve canoniche, aumentate di eventuali componenti eccezionali che corrispondono a punti semplici della superficie, sono date da curve doppie C_{n-3} d' ordine $n-3$, assoggettate ad avere opportune singolarità nei punti multipli di C_{2n} (1).

Se la C_{2n} ha punti multipli ordinari, distinti, è facile vedere (2) che ogni punto $2i^{\text{plo}}$ per essa è $(i-1)^{\text{plo}}$ per le C_{n-3}, ed ogni punto $(2i+1)^{\text{plo}}$ di C_{2n} è del pari $(i-1)^{\text{plo}}$ per le dette C_{n-3}.

È noto, fino dagli esempi presentatisi al sig. Nöther, che le molteplicità imposte alle C_{n-3} possono aumentare se la C_{2n} ha punti multipli infinitamente vicini.

Volendo ricercare la molteplicità imposta alle C_{n-3} da un punto O, multiplo per C_{2n}, a cui sieno infinitamente vicini altri punti multipli, si faccia nel piano una trasformazione quadratica generale, avente in O un punto fondamentale. Allora ad O viene a corrispondere una retta fondamentale o, che entra come parte nella trasformata di C_{2n}, e precisamente deve essere contata un numero pari o dispari di volte secondo la molteplicità di O per C_{2n}. Nel primo caso, questa retta a, come componente della curva di diramazione d' un piano doppio può ugualmente esser tolta; ma nel secondo caso essa figura essenzialmente, una volta, unita alla residua parte C' della detta trasformata. Ora la C' verrà ad avere su a dei punti multipli che corrispondono ai punti multipli di C_{2n} cadenti nell' intorno di O, ed hanno le stesse molteplicità di essi. Queste molteplicità si trovano aumentate di 1 per la $C' + a$. Di qui, se si considerano le trasformate delle C_{n-3} e si ritorna poi alle C_{n-3}, si deduce che le molteplicità che loro impongono i punti multipli di C_{2n} che cadono nell' intorno (di 1° ordine) di O, sono da valutarsi come se questi punti avessero per C_{2n} una molteplicità superiore di 1 a quella effettiva, da cui può resultare che le C_{n-3} debbano avere nel punto O stesso una molteplicità maggiore di quella innanzi assegnata. Con ciò si è tenuto conto dei

(1) Cfr. il § 5 della mia Nota *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche.* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1896.

(2) Cfr. *Introduzione* . . . cap. VI.

punti multipli di C_{2n} che cadono nell' intorno di 1° ordine del punto O. Se si vuol tener conto dei punti multipli di essa che sono nell' intorno di 2° ordine, occorre far uso di una trasformazione quadratica applicata a C' prendendo come punto fondamentale uno dei punti multipli che la C' ha su a. Applicando successivamente questo processo di trasformazione, fino a *sciogliere* la singolarità della C_{2n} nel punto O, e ritornando sempre alla C_{2n}, è facile determinare in ogni singolo caso le molteplicità che vengono imposte alle C_{n-3} in O e nei punti multipli infinitamente vicini ad esso. Ma l' espressione generale di queste molteplicità, quando è data la composizione del punto O, si presenta un po' complicata, soprattutto nel caso in cui i punti multipli dell' intorno di O si succedano sopra rami non lineari.

Pel nostro scopo basta indicare il seguente resultato relativo al caso in cui i punti multipli di C_{2n}, infinitamente vicini ad ogni punto multiplo proprio O, si trovino sopra rami lineari passanti per O.

Indicando con $r, s, t, \ldots$ le molteplicità dei punti A, B, C ... di C_{2n} che si succedono sopra un qualsiasi ramo lineare avente l' inizio in un punto r^{plo} O, e facendo uso del simbolo $[\varrho]$ per denotare la parte intera del numero ϱ, si ha:

Le C_{n-3} sono assoggettate alle condizioni di avere

1) la molteplicità $\left[\frac{i}{2} - 1\right]$ in A;

2) la molteplicità *complessiva* $\left[\frac{r+s}{2} - 2\right]$ in A, B (per modo che i rami lineari di curva per A, B, abbiano complessivamente riunite tante intersezioni colle C_{n-3});

3) la molteplicità complessiva $\left[\frac{r+s+t}{2} - 3\right]$ in A, B, C ecc.

Di qui si ricava in particolare che, nelle ipotesi introdotte: ogni punto $2i^{\text{plo}}$ per C_{2n} ha sempre la molteplicità $i - 1$ per le C_{n-3} e non maggiore; ogni punto $(2i+1)^{\text{plo}}$ di C_{2n} risulta $(i-1)^{\text{plo}}$ o i^{plo}, al più, per le C_{n-3}. Si ricava ancora che le singolarità più semplici della C_{2n}, abbassanti di 1 il genere (numerico) del piano doppio, sono: un punto 4^{plo}, o due punti 3^{pli} infinitamente vicini, ossia un punto [3, 3].

Passando ora alla determinazione delle immagini delle curve bicanoniche sul piano doppio che ha come curva di diramazione C_{2n}, osserveremo che qui sono anzitutto da distinguere due casi, secondochè le dette immagini B sono curve doppie e quindi d' ordine doppio delle C_{n-3}, ossia d' ordine $2n - 6$ ($B \equiv C_{2n-6}$), oppure curve semplici d' ordine $4n - 12$ ($B \equiv C_{4n-12}$); nel 2° caso esse non formano più, generalmente, un sistema lineare.

Le condizioni di molteplicità delle immagini B delle curve bicanoniche, relative ai punti multipli di C_{2n}, discendono dal fatto che il sistema bicanonico è doppio del canonico; quindi un punto ordinario $2i^{\text{plo}}$ o $(2i+1)^{\text{plo}}$

di C_{2n} sarà $2(i-1)^{plo}$ per le $B \equiv C_{2n-6}$ (doppie), e $4(i-1)^{plo}$ per le $B \equiv C_{4n-12}$ (semplici). Ma occorrono speciali riguardi quando si hanno punti multipli infinitamente vicini. Così se la C_{2n} ha un punto $[3, 3]$ (pel quale le immagini C_{n-3} delle curve canoniche debbono passare semplicemente) le $B \equiv C_{2n-6}$ dovranno *passare semplicemente per i due* punti tripli infinitamente vicini che lo compongono e le $B \equiv C_{4n-12}$ dovranno passarvi doppiamente [1]. E per noi basta limitarci all'osservazione relativa a questo caso.

3. Veniamo ora alla determinazione dei piani doppi pei quali

$$p^{(1)} = 1 \qquad\qquad P > 1.$$

Le superficie corrispondenti posseggono ∞^{P-1} curve bicanoniche di cui il genere vale $3p^{(1)} - 2 = 1$; queste curve costituenti un sistema lineare sono dunque composte colle curve ellittiche K di un fascio, giacchè l'esistenza di un sistema lineare ∞^2 di curve ellittiche irriducibili porterebbe l'annullarsi del genere e del bigenere della superficie, la quale anzi risulterebbe [2] razionale o riferibile ad una rigata ellittica.

Ora la superficie F che è immagine di un piano doppio di generi $p^{(1)} = 1$, $P > 1$, è trasformata in sè stessa da un'involuzione (razionale) I, la quale trasformerà in sè stessa ogni curva K del fascio nominato, o scambierà fra loro le curve K accoppiandole. In ogni caso le curve K avranno come corrispondenti, sul piano doppio, le curve L di un fascio, e le L saranno razionali (I) o ellittiche (II).

4. Poniamoci nel primo caso. Effettuando all'occorrenza una trasformazione birazionale del piano si può [3] supporre ridotto il fascio delle L ad un fascio di rette, avente un certo centro O. Allora la curva di diramazione C_{2n} del piano doppio avrà in O la molteplicità $2n-4$, o, in particolare, $2n-3$. Si può anche supporre la C_{2n} già ridotta (con trasformazioni quadratiche speciali aventi un punto fondamentale in O) ad avere soltanto punti multipli distinti da O, o punti multipli infinitamente vicini ad O che si succedono sopra rette per O. Infine si può supporre che la C_{2n} abbia l'ordine minimo tra quelle che si ottengono colle trasformazioni suindicate. È appena necessario avvertire che in C_{2n} debbono sempre essere comprese, *una volta*, quelle curve fondamentali (che nascono da punti del piano nelle trasformazioni precedenti) le quali verrebbero a figurare in essa un numero dispari di volte.

[1] Cfr. Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero*, § 15.

[2] Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche*. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1894.

[3] Nöther, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*. Mathem. Annalen, III.

Date le ipotesi precedenti le singolarità di C_{2n} che possono influire abbassando il genere del piano doppio, sono soltanto (cfr. n. 2): se O è $(2n-4)^{plo}$ dei punti 4^{pli} o dei punti [3, 3] (coppie di punti tripli infinitamente vicini) se O è $(2n-3)^{plo}$ dei punti tripli infinitamente vicini ad O o dei punti [3, 3]; ciascuna di queste singolarità abbasserà di 1 il genere del piano doppio, poichè i gruppi di $n-3$ rette per O rappresentanti le curve canoniche, dovranno contenere come parte fissa la retta congiungente O con un siffatto punto singolare.

Ma, per la irriducibilità ad ordine minore della C_{2n}, dovranno essere osservate le seguenti condizioni:

a) Se la C_{2n} ha un punto 4^{plo} A distinto da O, essa non possiede, oltre A ed O, alcun punto singolare influente sul genere. Infatti un tal punto non potrebbe essere fuori di OA, e d'altra parte neppure su OA senza che questa retta si staccasse *due* volte da C_{2n} e dovesse quindi esser tolta dalla C_{2n} stessa.

b) Se la C_{2n} ha un punto 4^{plo} infinitamente vicino ad O, non può avere punti [3, 3] distinti da O.

c) La C_{2n} non può avere due punti 3^{pli} infinitamente vicini, distinti da O e non allineati con esso: se O è $(2n-3)^{plo}$ la C_{2n} non può avere neppure un punto [3, 3] infinitamente vicino ad O (due punti 3^{pli} consecutivi su una retta per O) giacchè la sua congiungente con O si staccherebbe due volte da C_{2n} e dovrebbe quindi essere soppressa.

Restano così i seguenti casi tipici:

1) C_{2n} con O $(2n-4)^{plo}$ o $(2n-3)^{plo}$, senza altri punti multipli o con un punto 4^{plo} A distinto da O.

Le curve canoniche sono date da tutti i gruppi di $n-3$ rette per O, o risp. dai gruppi di $n-4$ rette aumentati della parte fissa OA; quindi

$$p_g = p_n = n-2 \quad \text{o risp.} \quad p_g = p_n = n-3 .$$

In quanto alle curve bicanoniche, esse sono composte colle curve ellittiche K rappresentate doppiamente sopra le rette per A; esse vengono date dunque dai gruppi di $2(n-3)$ rette per O di cui fa parte, eventualmente, la OA contata due volte, perciò

$$P = 2n-5 \quad \text{o} \quad P = 2n-6 .$$

2) C_{2n} con O $(2n-4)^{plo}$, r punti 4^{pli} infinitamente vicini ad O, h punti [3, 3] infinitamente vicini ad O (su altrettante rette per O che si distaccano da C_{2n}), dove

$$4r + 3h \leq 2n-4 .$$

Le rette per O contenenti i punti 4^{pli} si staccano una volta da tutti i gruppi canonici C_{n-3} di $n-3$ rette per O e due volte dai gruppi bicano-

nici di $2(n-3)$ rette; le rette per O contenenti i punti $[3,3]$ si staccano pure una volta dai gruppi C_{n-3} ma pure una volta sola dai gruppi bicanonici; per conseguenza si trova

$$p_g = p_n = n-2-h-r \qquad P = 2n-5-h-2r.$$

3) C_{2n} con O $(2n-4)^{plo}$ ed h punti $[3,3]$ su rette per O che si distaccano dalla C_{2n}. In questo caso si trova (come precedentemente)

$$p_n = n-2-h \qquad P = 2n-5-h \qquad p_g = p_n \text{ o } p_g = 0$$

se il p_n risulta negativo.

4) C_{2n} con O $(2n-3)^{plo}$ ed r punti 3^{pli} infinitamente vicini ad O. Questo è un caso particolare del caso 2); ancora

$$p_g = p_n = n-2-r \qquad P = 2n-5-2r.$$

Matematica. — *Osservazione sui massimi e minimi delle funzioni di due variabili.* Nota di G. VIVANTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Si dice che una funzione $f(x, y)$ di due variabili x, y ha un massimo o un minimo in un punto $O(a, b)$, se può assegnarsi un intorno di questo punto, in tutti i punti del quale la funzione abbia valore minore, o rispettivamente maggiore, di $f(a, b)$.

Può avvenire, come si sa, che su ogni retta uscente dal punto O possa assegnarsi un tratto finito in tutti i punti del quale la funzione sia, p. es., maggiore di $f(a, b)$, senza che essa abbia in O un minimo; cioè la funzione può avere un minimo nel punto O rispetto a qualunque retta passante per esso senza avere in quel punto un minimo.

Ci proponiamo di dimostrare, che la stessa cosa non può aver luogo quando, anzichè tutte le *rette*, si considerano tutte le *linee* uscenti dal punto O.

Qui occorre precisare alcuni concetti.

Diremo che una linea è *continua*, se essa possiede le due seguenti proprietà:

a) Dati due punti qualunque della linea, e data una quantità arbitraria σ, può iscriversi nella linea una spezzata avente gli estremi in quei due punti, e i cui lati sieno tutti minori di σ;

b) Ogni punto-limite d' un insieme di punti posti sulla linea appartiene alla linea (1).

(1) Questa definizione di *continuo lineare* è la stessa che fu data da G. Cantor (Math. Ann., t. XXI, e Acta math., t. II) pel continuo ad un numero qualunque di dimensioni.

Diremo poi che una funzione di due variabili ha in un punto P d' una linea continua un massimo od un minimo *rispetto a questa linea*, se può trovarsi una quantità r tale, che in tutti i punti della linea che distano da P meno di r la funzione prenda valori più piccoli, o rispettivamente più grandi, di quello che essa prende in P.

Dopo ciò noi ci proponiamo di dimostrare che, se in un punto O (a, b) la funzione $f(x, y)$ è, p. es., minima rispetto a tutte le linee continue passanti per O, essa ha in quel punto un minimo nel senso della definizione enunciata in principio.

A tale scopo faremo vedere che, se la funzione non ha un minimo nel punto O, può trovarsi una linea passante per O e rispetto alla quale la funzione non è minima in questo punto.

Se $f(x, y)$ non è minima in O, ciò vuol dire che in qualunque intorno, per quanto piccolo, di O vi sono punti in cui la funzione ha valore non maggiore di $f(a, b)$. Descritto dunque intorno ad O come centro un cerchio C_1 di raggio r_1, vi sarà entro C_1 un punto (x_1, y_1) tale che $f(x_1, y_1) \leq f(a, b)$. Col centro ancora in O, descriviamo un cerchio C_2, di raggio r_2, che non contenga nel suo interno il punto (x_1, y_1); esisterà entro C_2 almeno un punto (x_2, y_2) tale che $f(x_2, y_2) \leq f(a, b)$. Così continuando, e scegliendo gli elementi della successione decrescente $r_1, r_2, \ldots..$ in modo che essa abbia per limite zero, O sarà punto-limite dell' insieme di punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$, e quindi una linea continua qualunque passante per questi punti passerà anche per O. Ora la funzione $f(x, y)$ non può avere in O un minimo rispetto a questa linea; infatti, per quanto piccola si prende r, può sempre trovarsi nella successione $r_1, r_2, \ldots.$ un elemento $r_i < r$, e in tutti i punti (x_i, y_i), $(x_{i+1}, y_{i+1}), \ldots$, che distano da O meno di r, la funzione ha valori non maggiori di $f(a, b)$.

Con ciò è provato l' asserto.

Fisica. — *A proposito della interpretazione del fenomeno di Zeemann data dal sig. Cornu* [1]. Nota del dott. Orso Mario Corbino, presentata dal Socio Blaserna.

Le importantissime esperienze del Zeemann sono state riprodotte dal Cornu [2] con una disposizione ottica che completa i risultati ottenuti dal primo. Rimane cioè stabilito che in un raggio originato in un campo magnetico e che si propaghi in esso perpendicolarmente alla sua direzione, una riga è trasformata in un sistema di tre o quattro righe vicinissime, intera-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica della R. Università di Palermo.

(2) Comptes Rendus, t. 125, pag. 555; t. 126, pag. 181.

mente polarizzate, le due esterne parallelamente, e la centrale o il gruppo delle due interne perpendicolarmente alle linee di forza. Invece per un raggio che si propaghi nel senso delle linee di forza (attraversando il nucleo forato dell' elettrocalamita), la luce naturale di lunghezza d' onda λ viene trasformata in due righe di lunghezze d'onda $\lambda - \varepsilon$, $\lambda + \varepsilon$ polarizzate circolarmente in senso inverso, e precisamente quella di lunghezza $\lambda - \varepsilon$ è costituita di luce circolare girante nel senso della corrente che produce il campo magnetico.

Il Cornu, dopo richiamati i noti principî di Fresnel sulla costituzione della luce naturale, e la decomponibilità della luce polarizzata rettilineamente in due fasci a vibrazioni circolari inverse, e quello di Ampère sulla equivalenza di una linea di forza magnetica e di un solenoide elettromagnetico, ha dato dei fenomeni osservati una interpretazione cinematica nel seguente enunciato:

L' azione del campo magnetico sull' emissione di una radiazione tende a decomporre le componenti rettilinee vibratorie suscettibili di propagarsi per onde secondo vibrazioni circolari parallele alle correnti del solenoide equivalente al campo.

Le vibrazioni che girano nel senso della corrente del solenoide sono accelerate, quelle che girano in senso inverso sono ritardate.

L'equivalenza di questo enunciato ai risultati dell'esperienza è meno evidente di quello che sembri a prima vista, poichè dipende da un' altra questione di ottica ancora controversa circa l'azione dello spettroscopio sulla luce a piano di polarizzazione girante e sulla luce periodicamente smorzata.

Esaminiamo infatti dapprima il caso che la luce emessa nel campo sia osservata nel senso delle linee di forza. I due circolari inversi di diverso numero di vibrazioni che corrispondono a una delle due componenti rettilinee della vibrazione primitiva alterata dal campo si ricomporranno, appena fuori da questo, costituendo un fascio di luce a piano di polarizzazione girante, poichè due raggi circolari inversi uno di $N - n$, l'altro di $N + n$ vibrazioni dan luogo, come è noto, a un raggio di N vibrazioni il cui piano di polarizzazione compie n giri al secondo, cioè a un raggio identico a quello che esce da un Nicol che faceva n rotazioni a secondo.

E allora questa luce a piano di polarizzazione girante di lunghezza d' onda λ (corrispondente al numero primitivo N di vibrazioni) giungendo sullo spettroscopio darà luogo a una riga unica di luce identica a quella che cade sulla fenditura, o a due righe distinte corrispondenti alle lunghezze d' onda $\lambda - \varepsilon$, $\lambda + \varepsilon$ e costituite di luce circolare inversa?

Secondo il Verdet, in uno spettroscopio sufficientemente dispersivo, si dovrebbero avere due righe luminose. Il prof. Righi [1] però combatte l'as-

[1] Righi, *Sui cambiamenti di lunghezza d' onda prodotti dalla rotazione di un polarizzatore*, ecc., Memorie dell'Accademia di Bologna, 1882.

serzione del Verdet e viene alla conclusione che se sulla fenditura di uno spettroscopio di qualsiasi potere dispersivo si fa cadere la luce primitivamente omogenea proveniente da un Nicol girante, si osserverà un' unica riga corrispondente alla lunghezza d' onda primitiva. Solo nel caso in cui si arresti con un mezzo qualsiasi uno dei due raggi circolari inversi che compongono la luce a piano di polarizzazione girante (p. es. con un polarizzatore circolare), l'altro si rifrangerà in ragione del suo numero di vibrazioni diverso dal primitivo.

Evidentemente se è vero il concetto del Verdet, l' enunciato del Cornu è conforme all' esperienza, mentre se è vero quello del Righi, un'azione del campo che fosse conforme alla regola del Cornu non dovrebbe produrre lo slargamento della riga che si osserva senza analizzatore; e inoltre, siccome nelle sue osservazioni il Cornu si serviva del polarizzatore circolare *dopo* che il raggio era stato diffratto dal reticolo assumendo una direzione definitiva, anche estiguendo l'uno o l'altro dei due raggi circolari inversi, non dovrebbe cambiare la posizione della riga, come solo potrebbe avvenire, secondo le idee del Righi, se l' analizzatore fosse posto prima della fenditura.

Dippiù, secondo l'enunciato del Cornu, l'altra componente vibratoria perpendicolare alla prima e da essa indipendente (con la quale formava la luce naturale) dovrebbe dar luogo a un raggio di lunghezza d' onda eguale alla primitiva col piano di polarizzazione girante in modo continuo e che si mantenga sempre a 90° dal primo, cioè tale da ricostituire sempre con questo luce naturale di lunghezza d' onda eguale a quella di prima. E secondo il Righi si dovrebbe perciò avere dopo la rifrazione nello spettroscopio, una riga unica di luce naturale.

Un ragionamento analogo si può fare nel caso dei raggi osservati perpendicolarmente al campo magnetico. Anche in questo caso i due circolari inversi visti di traverso (*de tranche*) che equivalgono al fascio polarizzato orizzontalmente e il cui periodo sarebbe alterato, si possono ritenere come due vibrazioni parallele e rettilinee (rispetto alla componente trasversale al raggio) di numeri di vibrazioni $N - n$, $N + n$. Queste genereranno, come dimostrò il Righi [1], un fascio di N vibrazioni con $2n$ battimenti al secondo. Sulla fenditura dello spettroscopio giungerà quindi luce periodicamente smorzata [2] ma di N vibrazioni, e, secondo il Righi, il prisma non potrebbe sdoppiare i due raggi che hanno già interferito sulla fenditura. Non si potrebbe quindi spiegare con l' enunciato del Cornu la tripla o quadrupla riga che si osserva in direzione perpendicolare alle linee di forza.

[1] Righi, *Sulla velocità della luce nei mezzi magnetizzati.* Appendice. Memorie dell'Accademia di Bologna, 1878.

[2] Si intende che così si tien conto soltanto di *una* particella luminosa. Nel caso di una sorgente di estensione finita, i massimi e i minimi delle vibrazioni dei varî punti non coincideranno, e quindi si avrà sulla fenditura luce di intensità media costante.

L' equivalenza dell'enunciato del Cornu, all' esperienza è quindi subordinata alla risoluzione di questi due quesiti:

1° Un fascio di raggi, primitivamente monocromatico e uscente da un Nicol girante, attraversando uno spettroscopio abbastanza dispersivo si sdoppia in due circolari inversi di $N - n$, $N + n$ vibrazioni o dà un'unica riga corrisponde ad N vibrazioni?

2° Due raggi, uno di $N - n$, l' altro di $N + n$ vibrazioni rettilinee e parallele che producono per il fenomeno dei battimenti luce intermittente sulla fenditura di uno spettroscopio, si sdoppiano in due righe attraversando il prisma, o dànno una riga unica corrispondente a N vibrazioni?

Il Righi sostiene molto ingegnosamente che lo sdoppiamento non debba avvenire. Io mi permetto però, salvo il rispetto dovuto all' illustre professore, di mettere modestamente in rilievo alcune obbiezioni che mi pare potrebbero essere opposte alle sue argomentazioni; obbiezioni che, se fossero esatte, permetterebbero di accettare la interpretazione dei fenomeni di Zeemann data dal Cornu.

1°) I due circolari inversi di numeri di vibrazioni $N - n$, $N + n$, dice il Righi, si compongono nel loro cammino in un raggio a piano di polarizzazione girante di N vibrazioni. La rifrazione si farà in ragione di questo numero N di vibrazioni, cioè con una riga unica, poichè effettivamente sulla fenditura si ha luce di N vibrazioni, sebbene a piano di polarizzazione girante: e siccome la posizione del piano di polarizzazione non influisce sulla posizione della riga, ma vi influisce solo il periodo della luce che la fenditura riceve, periodo che è unico, non c' è ragione perchè si abbiano due righe di $N - n$, $N + n$ vibrazioni.

Se mi si consente di esprimere il mio modesto avviso sull'argomento, mi sembra che ci sia equivoco nella parola *periodo*. Qualunque sia la legge della vibrazione, sinusoidale o no, essa ha sempre un periodo determinato dal tempo che intercede perchè la particella torni a passare successivamente per le stesse posizioni con le stesse velocità di prima. Ma una vibrazione complessa di un certo periodo può per il teorema di Fourier decomporsi (e in un modo unico) in un certo numero di vibrazioni sinusoidali di diverso periodo, e in questa decomposizione precisamente consiste la funzione ottica del prisma. Se quindi sulla fenditura arriva luce di periodo $\frac{1}{N}$, la quale però non sia semplice, ma costituita della sovrapposizione di due vibrazioni semplici di periodo $\frac{1}{N-n}$, $\frac{1}{N+n}$ il prisma la decomporrà in queste due che erano le sole che potevano produrla.

Lo stesso dicasi nel caso che le due vibrazioni siano rettilinee e di periodo $\frac{1}{N-n}$, $\frac{1}{N+n}$. Avviene allora il fenomeno dei battimenti, per cui

la vibrazione assume la forma periodicamente smorzata nota dall' acustica. Il periodo della vibrazione risultante sarebbe dato a rigore da $2n$ vibrazioni a secondo; ma si ha anche un periodo apparente che corrisponde a N vibrazioni al secondo. Però non si ha più da fare con luce sinusoidale o monocromatica, ma con luce la cui vibrazione si potrebbe decomporre con la serie di Fourier nelle due vibrazioni semplici che la produssero, corrispondenti a $N - n$ ed $N + n$ vibrazioni; e questa scomposizione, che non può essere fatta che in questo modo solo, viene fatta fisicamente dal prisma [1].

Poichè adunque la deviazione nel prisma non dipende, diciamo così, dal valore *bruto* del periodo ma dalla scomposizione di una vibrazione periodica qualsiasi in vibrazioni semplici o sinusoidali, la luce a piano di polarizzazione girante, che non è semplice, deve esser decomposta dal prisma nei due raggi circolari [2] di diverso periodo che le diedero origine.

2°) Un altro degli argomenti addotti dal prof. Righi per sostenere la sua tesi è il seguente.

Si producano con due fasci di luce semplice di $N - n$, $N + n$ vibrazioni delle frange in moto su uno schermo [3]. Dispongasi sullo schermo la fenditura dello spettroscopio, parallelamente alle frange. Ogni volta che passa sulla fenditura una frangia nera sparisce la luce che si osserva allo spettroscopio; mentre se si avessero due righe distinte di $N - n$ ed $N + n$ vibrazioni il campo dello spettroscopio non dovrebbe mai oscurarsi. Questo dimostra quindi che il prisma riproduce il fenomeno risultante che si ha sulla fenditura, e che perciò la riga è unica.

Questa esperienza mi sembra sia anche spiegabile con l' ipotesi dello sdoppiamento della riga. Ammettendo infatti che il prisma dia due righe distinte (le quali intanto devono essere straordinariamente vicine, poichè per una velocità sullo schermo di 10 frange a secondo, il massimo perchè l'occhio possa avvertire il loro alternarsi, le due righe disterebbero di circa $\frac{1}{5 \times 10^{10}}$ della distanza delle due righe del sodio), queste due righe quasi in contatto, di diverso numero di vibrazioni ma che si suppongono capaci d' interferire produrranno intorno a sè delle frange in moto analoghe a quelle che si avevano sullo schermo, ma di una estrema larghezza, poichè le sorgenti sono vicinissime; e quindi nell' occhio dell'osservatore si avranno delle alternazioni

[1] La luce bianca, che equivale alla sovrapposizione di infinite luci semplici, si può ritenere dovuta (come è dimostrato dalle eleganti considerazioni del Garbasso) a una vibrazione fortemente smorzata di un certo periodo. E poichè la luce bianca attraversando il prisma da uno spettro continuo e non la riga unica corrispondente al primitivo periodo, l'ipotesi del Garbasso sarebbe inconciliabile con le idee del prof. Righi.

[2] È evidente che una vibrazione circolare essendo la sovrapposizione di due vibrazioni pendulari ortogonali dello stesso periodo e con uno spostamento di fase eguale a un quarto del periodo, nel prisma si rinfrangerà come se fosse luce semplice.

[3] Vedi la Mem. del Righi, del 1882, pag. 25.

di luce e di oscurità secondo che da un istante all'altro le due sorgenti sono concordanti o in opposizione. Si spiega così l'intermittenza della riga apparentemente unica durante il moto delle frange sullo schermo.

Se queste obbiezioni alla previsione del prof. Righi sono fondate in modo che possa ammettersi lo sdoppiamento prodotto dal prisma della luce a piano di polarizzazione girante o di quella delle frange mobili, solo in tal caso l'interpretazione cinematica che il Cornu ha dato del fenomeno di Zeemann corrisponde all'esperienza.

Mineralogia. — *Notizia sopra alcune specie minerali nuove per la Sardegna.* Nota di Domenico Lovisato, presentata dal Socio Struever.

Fino dal maggio 1886 il compianto ing. Leone Goüin fra gli altri esemplari di cloruro d'argento me ne regalava uno brutto, terroso, disseminato però di massecole cristalline di color verde-giallastro oscuro, tendente al verde asparagio, che io fin d'allora collocai, per mancanza di spazio, involto in carta nella collezione generale, apponendovi sul cartellino la scritta: *Cloruro d'argento con Bromirite*? L'esemplare in parola, proveniente da Bruncu Arrubbiu nel seguito di Tacconis, sponda destra della vallata di Rio Ollastu, se ne stava là fino al maggio passato, epoca nella quale venne nel gabinetto di mineralogia il sig. Gerolami, caporale maggiore di miniere, per mostarmi un minerale d'argento verde e domandarmi, se conosceva della *Bromirite* in Sardegna, ritenendo tale il suo campione. Rammentandomi allora del campione sopra ricordato, glielo mostrai col cartellino su citato e che datava dalla bellezza di 11 anni. Non mi disse donde proveniva il suo esemplare, ma mi lasciava qualche frammento, che esaminai in seguito e che pei caratteri fisici e chimici si mostrerebbe assieme all'altro mio come una varietà di *Embolite*, cioè un *cloro-bromuro di argento*, specie minerale non ancora conosciuta per l'isola.

Si veggono qua e là nelle massecole del mio esemplare abbastanza frequenti le faccie del rombododecaedro e poi quelle del cubo, nè mancano quelle del pentagonododecaedro, che si presentano come striature parallele agli spigoli del cubo; faccie nette dell'ottaedro non ho potuto vedere. La durezza di poco supera il 1° grado ed il peso specifico alla temperatura di 30°C fu di 5,659 ed a quella di 26°C di 5,725, giusta la pesate che ho potuto fare in compagnia del collega di fisica prof. Guglielmo, alla cui gentilezza vado obbligato anche pei pesi specifici delle altre specie minerali, ricordate nella presente Nota.

Al cannello fonde dando facilmente globulo d'argento: anche nel tubo chiuso fonde dopo leggiera decrepitazione e tanto la parte fusa come il mi-

nerale naturale si sciolgono nell' ammoniaca. Fatta una soluzione coll' ammoniaca concentrata, nella quale si scioglie tanto il cloruro che il bromuro, e precipitata poi con acido nitrico e trattato il precipitato con acqua di cloro e solfuro di carbonio, si ottiene la colorazione gialla rancione, che si separa al fondo e che mostra la presenza del bromo.

Stando alla intensità della colorazione rancione ottenuta, dovrei concludere non essere tanto abbondante il bromo nel campione del Gerolami e meno abbondante ancora in quello del Goüin, ma già si sa come questa specie minerale sia variabilissima nei suoi componenti cloro e bromo.

In questa occasione mi prese vaghezza di riesaminare tutti i frammenti di mia proprietà, che conservava fra i cloruri. In questi trovai un bellissimo campione, regalatomi dall' ing. Giambattista Traverso come *cloruro d' argento di Tacconis:* Esso in venuzza, che ho potuto delicatamente liberare dalla barite, che la occultava, mi ha presentato oltre a belle masserelle reniformi di un bel verde pistaccio, passante al verde oliva, dei grumetti cristallini brillantissimi, dalla lucentezza adamantina.

Ho potuto vedervi nettamente l' ottaedro, in altro punto delle parti di rombododecaedri, ma più frequenti sono le faccie del cubo. Anche queste masserelle cristalline e reniformi sono assai probabilmente di *Embolite*, perchè mentre le lamelle di *cloruro* si sono annerite o sono divenute di un pavonazzo oscuro, come avviene pei cloruri d' argento, esposti alla luce, esse hanno conservato il bel colore verde caratteristico della specie.

Pur troppo il materiale è così poco che non ho potuto fare altre prove, nè far procedere il chimico all' analisi quantitativa, anche per sapere la quantità di bromo, ma le prove fatte mi sembrano sufficienti per stabilire l' identità del nostro minerale coll' *Embolite.*

Non lungi dalla miniera di *S' Ortu Beciu* in quel di Donori, miniera speciale che presenta in mezzo a *baritina* la *galena* in noduli, in masse più o meno rotondeggianti coll' accompagnamento anche della *Witherite*, della *Piromorfite*, della *Cerussite* ecc., dentro alle granuliti nel quarzo candido trovasi allo stato compatto in venuzze, in arnioncini, disgraziatamente non cristallizzato un minerale fragile, nero brunastro, presentante in qualche punto una tinta rossastra, fortemente splendente, specialmente sulle rare superficie di sfaldatura, dalla lucentezza metallico-adamantina, e che esaminato negli altri suoi caratteri fisici e nei chimici si appalesa per una *Wolframite*, altra specie minerale nuova per la Sardegna.

La polvere è bruno rossastra nel nostro minerale: la sua durezza non è superiore al 5° grado, essendo intaccato da qualche apatite: il peso specifico alle temperature di 30° e di 26° fu rispettivamente di 6,990 e 6,994; si noti però che i frammenti adoperati, sebbene scelti fra i più puri, pure contengono qualche venuletta o qualche grano di quarzo sparso che fa discendere il peso specifico. Fonde non tanto facilmente in globetto con superficie

nero-bluastro-appannata, attirabile dalla calamita. Col borace dà perla d' un verde intenso, che diviene verde bottiglia pallido raffreddandosi: col sal di fosforo la perla è giallo-rossa ed a freddo impallidisce, restando rosso vinato chiaro; con soda e nitro su foglia di platino fonde in un manganato verde bluastro. La polvere finissima trattata a caldo con acqua regia si decompone con separazione di acido tungstico, come precipitato giallo, che si depone al fondo e sulle pareti del matracciolo. E qui per le prove chimiche mi soccorse l' egregio e carissimo dott. Giovanni d'Achiardi dell' Università di Pisa, cui ho inviato frammenti di questa specie minerale, dell' altra citata e della quale non fece che confermare i miei procedimenti e la mia diagnosi, dell' altra che segue e di una quarta specie minerale, della quale l' analisi quantitativa l' avrebbe portato alla conclusione trattarsi di un *Jaloallofane cupro-zincifero*, che dal distinto giovane mineralista pisano vedremo presto pubblicato.

A verificare che fosse realmente acido tungstico quello del precipitato, sopra ricordato, si provò, se fosse solubile nel solfuro ammonio. Il liquido chiaro che resta sopra il precipitato trattato a caldo con ammoniaca dà un precipitato abbondante di aspetto fioccoso, di color rosso mattone. Raccolto questo su di un filtro si è disciolta una parte con acido cloridrico e saggiato con prussiato giallo si è avuto il precipitato bleu caratteristico dei sali di ferro; l'altra parte sciolta in acido nitrico si fece bollire con biossido di piombo, e il liquido si è colorato in rosso cremisi non molto intenso, svelandoci la presenza di un idrato manganoso, che ossidandosi passava ad acido permanganico.

A queste, che sarebbero le prove approssimativamente fatte anche da me, il bravo dott. G. D'Achiardi aggiungeva altre ricerche che qui riporto colle sue testuali parole: « Ho fuso il minerale con nitro ed ho ottenuto una massa opaca verdastra: la colorazione è dovuta al manganato di potassio, che si forma come lo dimostra la colorazione cremisi leggerissima, che acquista la soluzione acquosa di tale massa, colorazione dovuta al solito alla formazione dei permanganati. Aggiungendo poche goccie di acido cloridrico a questo liquido (i prodotti della fusione sono completamente solubili nell' acqua) e scaldando sino a che cessi lo sviluppo di vapori nitrosi, la colorazione sparisce; quindi, se si saggia con ammoniaca, si ha il solito precipitato, che si constata essere di ferro e di manganese. Se invece alla soluzione precedente di aggiungervi poche goccie si aggiunga l' acido cloridrico in discreta quantità, essa si intorbida e si ha precipitato giallo, che si constata essere di acido tungstico per il colorarsi in azzurro rapidamente, quando si immerga nel liquido una lamina di zinco e venga quindi il precipitato a trovarsi a contatto con idrogeno nascente.

« Naturalmente il liquido separato da questo precipitato dà le solite reazioni del ferro e del manganese. Difficilissimo è il determinare la quantità

del ferro e del manganese, disponendo di così poca materia: però così ad occhio pare più abbondante il ferro del manganese, quindi io credo si tratti di *Wolframite* e non di *Hübnerite*, sebbene si abbiano anche alcune *Hübneriti*, che contengono il 4,64°/₀ di ferro ».

Infatti il Dana per la *Hübnerite* di Bayevka negli Urali ci dà proprio questo quantitativo di ferro; ma la nostra specie ne contiene in assai maggiore quantità e quindi trattasi proprio di *Wolframite*.

Pei frammenti di questa specie minerale vado riconoscente all' egregio sig. Emilio Marini, perito minerario, che attualmente dirige la miniera di S'Ortu Beciu, ed al carissimo ing. Carlo Flori Thorel, col quale il 14 corr. si fece una gita lassù per trovare in posto il quarzo contenente la *Wolframite*; ma a nulla giunsero le nostre indagini, riuscendo solo a trovare pochi campioni con frammenti del nostro minerale nei massi isolati di quarzo in mezzo a quel mondo di granuliti: però dai nidi a grossi elementi che qua e là si veggono nelle granuliti di quella località, talora anche con segregazioni grosse di quarzo, non credo ingannarmi derivando anche i pezzi di quarzo con *Wolframite* da una di quelle segregazioni. Non voglio lasciare non ricordata una vena di *Arseniopirite* (*Mispichel*), che coll' inclinazione a nord e direzione quasi est-ovest, trovasi nella stessa granulite, immediatamente sopra le antiche lavorazioni della miniera: ed è proprio quasi al nord-est di questa vena, a pochi metri di distanza che trovansi i massi di quarzo con *Wolframite* in una specie di piccolo avvallamento.

Nei micaschisti granatiferi tormaliniferi [1] della zona arcaica della parte nord-ovest dell' isola e precisamente alla spiaggia dell' Istintino, non lungi da Capo Falcone, vediamo frequenti le vene ed i noduli di quarzo. In qualcuna di queste vene e sopra qualche arnioncino di tale quarzo come in tenui veli, quasi sempre accompagnati dalla mica, ho trovato una sostanza nera, dalla lucentezza submetallica, che mi fece pensare tosto per il suo colore, la sua durezza, quasi eguale a quella dell' acciaio, alla *Columbite*, che in così grande quantità avea visto nel 1881 nei berilli delle Sierre di Cordova (Repubblica Argentina) ed assieme al quarzo. Ma la pochezza del materiale che ho potuto raccogliere, non mi ha permesso il lusso di procedere spedito come per la specie precedente, nè ho trovato un chimico, che con pochi grammi di quella sostanza volesse regalarmi l' analisi quantitativa.

Devo quindi accontentarmi di dare dei cenni ancora più brevi, che non abbia fatto per la *Wolframite* per venire alla conclusione, che la sostanza nera dell' Istintino si avvicina molto ad una *Tantalite ferrica*, sebbene il peso specifico debole 4,744 a 30°C e 4,636 a 26°C contrasterebbe, andando i pesi specifici per le *Columbiti* e *Tantaliti* pel Dana da 5,3 a 7,3; ma con-

[1] D. Lovisato, *La tormalina nella zona arcaica di Caprera*. Rend. d. R. Accad. d. Lincei, vol. IV, 1° sem., serie 5ª, 1895, pag. 84-85.

vien pensare che i frammenti adoperati per le pesate non poterono essere liberati dalle venuzze di quarzo, che comprendono.

La polvere finissima è decomposta dall' acido cloridrico concentrato, lasciando un residuo bianco (la soluzione cloridrica non contiene che ferro con poco manganese ed alluminio): questo residuo fonde nella perla di borace formando un vetro limpido, il quale con maggiore aggiunta di acido si presenta giallognolo a caldo ed incoloro a freddo; non muta comportamento la perla nella fiamma di riduzione. Cogli stessi caratteri si presenta la perla col sale di fosforo, quindi abbiamo la presenza dell' acido tantalico, mentre non si ottiene una reazione caratteristica pell' acido niobico, del quale si vedono solo traccie nel debole coloramento rosso, che si ottiene aggiungendo nella perla precedente una traccia di sale ferroso, sempre nella fiamma di riduzione.

Lo stesso residuo bianco fuso con solfato acido potassico e lisciviato con acqua fredda non si scioglie. Se si filtra, la parte filtrata ridotta con acido solforico non precipita, nè intorbida coll' ebollizione prolungata. La parte insolubile fusa con idrato sodico e lavata con carbonato sodico non si discioglie, nel mentre è completamente solubile nell' acido fluoridrico. Dalla soluzione si ottiene cristallizzato il fluotantalato potassico in bassi prismi quadrangolari. Si può riconfermare la presenza dei sali di tantalio dalla nota reazione coll' acido tannico.

L' acqua madre, rimasta dopo la separazione degli anzidetti cristalli, appena diviene rosea per l' azione dell' acido tannico, e con ciò si esclude la presenza di notevoli quantità di acido niobico.

La pochezza del materiale, come già sopra ho detto, non ha permesso di tentare l' analisi quantitativa e quindi di stabilire anche solo approssimativamente la quantità di acido niobico; però dalle reazioni avute anche per quest' ultimo acido, credo bene si possa stabilire ch' esso trovasi nel nostro minerale in minime proporzioni, e perciò lo stesso minerale, più che ad una *Columbite*, s' avvicina ad una *Tantalite ferrica.*

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° maggio 1898.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sulle macchie, facole e protuberanze solari osservate al R. Osservatorio del Collegio Romano nel 1° trimestre del 1898.* Nota del Socio P. Tacchini.

Presento all'Accademia i risultati delle osservazioni fatte nel 1° trimestre del corrente anno; la stagione fu abbastanza favorevole per le osservazioni delle macchie e delle facole, come rilevasi dalla seguente tabella:

1898

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Frequenza delle macchie	Frequenza dei fori	Frequenza delle M+F	Frequenza dei giorni senza M+F	Frequenza dei giorni con soli fori	Frequenza dei gruppi di macchie	Media estensione delle macchie	Media estensione delle facole
Gennaio . .	25	3,88	3,96	7,84	0,00	0,00	2,72	37,80	71,64
Febbraio . .	22	4,91	9,73	14,64	0,14	0,00	2,87	50,09	72,27
Marzo . . .	20	5,01	5,30	10,40	0,20	0,15	2,25	48,50	83,50
Trimestre	67	4,58	6,25	10,83	0,10	0,05	2,63	45,03	75,39

In questo trimestre ci fu un notevole aumento nel fenomeno delle macchie in confronto della precedente serie, con un massimo secondario nel mese di febbraio; in relazione a ciò il numero dei giorni senza macchie fu minore; in quanto alle facole la differenza fra le due serie è assai piccola. Notevole

fu il gruppo di macchie del febbraio, che nel giorno 14 trovavasi verso il centro del disco solare fra i paralleli di — 6° e — 12° per un' estensione in longitudine di circa un terzo del raggio del disco stesso, cosa piuttosto rara in epoca di minimum dell' attività solare. Dopo quasi una intiera rotazione, cioè intorno all' 11 marzo un nuovo gruppo di macchie trovavasi nella parte centrale del disco, cioè nella stessa regione del gruppo del 14 febbraio un poco più al sud e pressochè della stessa estensione, cioè di 5',3, ciò che dimostra come in quella plaga abbia perdurato a lungo la causa interna capace di podurre macchie per molto tempo nella stessa località, mentre che un tal fatto non potrebbe spiegarsi colla sola differenza di velocità nelle zone superficiali.

Per le protuberanze ecco i risultati del trimestre:

1898

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Medio numero delle protuberanze per giorno	Media altezza per giorno	Estensione media	Media delle massime altezze	Massima altezza osservata
Gennaio . .	18	2,61	31",6	1°,4	36",0	60"
Febbraio . .	14	2,57	30,8	1,2	35,4	75
Marzo . . .	13	2,38	31,2	1,4	37,1	86
Trimestre	45	2,53	31,2	1,3	36,1	86

La stagione fu ben poco favorevole a queste osservazioni, ma si può ritenere che il fenomeno delle protuberanze solari presentò in questo trimestre una notevole diminuzione in confronto della serie precedente, il contrario cioè di quanto avvenne per le macchie.

Fisica. — *Le ombre dei raggi X studiate con la fotografia.* Nota del Socio Emilio Villari.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Osservazioni della nuova cometa Perrine (1898, marzo 19).* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

Il cielo eccezionalmente sfavorevole e altre circostanze non mi permisero di osservare la nuova cometa, scoperta da Perrine al Lick Observatory il 19 marzo, se non due volte.

		α apparente cometa	δ apparente cometa
1898 Aprile 3	$15^h 41^m 14^s$ R. C. R.	$22^h 16^m 37^s 80$ (9.711 n)	+ 31° 27′ 8″ 6 (0.681)
1898 Aprile 9	13 45 21 »	22 43 27 37 (9.693 n)	+ 36 47 48 1 (0.810)

Le osservazioni sono fatte all' equatoriale di 0m25 col micrometro filare.

L' astro nei primi dì della scoperta era lucente, con nucleo di 7ma e piccola coda; attualmente, allontanandosi sì dalla terra che dal sole, va perdendo rapidamente nello splendore. Elementi parabolici sono per ora bastevoli a rappresentare il suo movimento apparente nel cielo; l' astro fu al perielio il 17 marzo e la distanza perielia fu 1,1.

Matematica. — *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Nota di Federigo Enriques, presentata dal Socio Cremona [1].

5. Discutiamo ora il caso II in cui le immagini L delle parti variabili irriducibili delle curve bicanoniche, sul piano doppio, sono curve ellittiche, costituenti un fascio. Seguendo il sig. Bertini, questo fascio può essere ricondotto birazionalmente ad un fascio di curve C_{3s} (d' ordine $3s$) con 9 punti s^{pli} (fascio di Halphen). Indichiamo con C_{2n+6} la curva di diramazione del piano doppio così trasformato e con $x_1, x_2 \dots x_9$ le sue molteplicità nei 9 punti base delle C_{3s}.

Le curve canoniche (unitamente a qualche curva eccezionale) verranno rappresentate da curve C_n passanti pei detti 9 punti con certe molteplicità $h_1, h_2 \dots h_9$, dove

$$x_i = 2h_i + \varrho_i$$

essendo $\varrho_i \leq 2$.

Ora poichè le C_{3s} rappresentano, sulla superficie, delle curve ellittiche K componenti un fascio, privo di punti base, esse non vengono incontrate dalle C_n nè dalla C_{2n+6}, sicchè

$$3ns - \sum h_i s = 0,$$
$$(2n+6) . 3s - \sum (2h_i + \varrho_i) . s = 0,$$

ossia

$$3n - \sum h_i = 0$$
$$6n + 18 - 2\sum h_i - \sum \varrho_i = 0,$$

da cui

$$\sum \varrho_i = 18 \qquad \varrho_i = 2 \qquad x_i = 2h_i + 2.$$

Calcoliamo ora il genere lineare $p^{(1)}$ del piano doppio che deve essere uguale ad 1, tenendo conto del numero virtuale delle intersezioni di due curve canoniche, il quale vale $p^{(1)} - 1$.

Se nella C_n non entrano parti eccezionali, si ottiene

$$n^2 - \sum h_i^2 = p^{(1)} - 1 = 0.$$

[1] V. pag. 234.

Ma se nella C_n entra una C_δ composta di curve eccezionali, e passante pei nominati punti h_i pli di C_n colle molteplicità y_i ($\leq h_i$), si avrà

$$p^{(1)} - 1 = (n - \delta)^2 - \sum (h_i - y_i)^2 = 0 .$$

D' altra parte, considerando le intersezioni di $C_{n-\delta}$, C_δ, si dedurrà

$$\sum h_i y_i \leq \delta(n - \delta) .$$

Si ricava

$$n^2 - \sum h_i^2 - \delta^2 - \sum y_i^2 \geq 0$$
$$n^2 - \sum h_i^2 > 0 .$$

In ogni caso sussiste dunque la disuguaglianza

$$n^2 - \sum_1^9 h_i^2 \geq 0 .$$

Ora, tenendo conto dell' eguaglianza

$$3n - \sum_1^9 h_i = 0 ,$$

si può concludere

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_9 = \frac{n}{3} .$$

Infatti n^2 rappresenta il minimo valore della somma dei quadrati di 9 numeri h_i, tali che $\sum_1^9 h_i = 3n$, onde per altri valori dati ai numeri h_i riuscirebbe $n^2 - \sum h_i^2 < 0$.

Segue in particolare che n è divisibile per 3 ($2n + 6 = 6m$), e $\delta = 0$, ossia non vi sono, sul piano doppio, curve eccezionali.

Ora poichè la $C_{2n+6} = C_{6m}$ deve avere le molteplicità $\frac{n}{3}$ nei 9 punti base $s$pli per le C_{3s}, essa dovrà comporsi di un certo numero r di C_{3s}, ed eventualmente anche (per s dispari > 1) della cubica C_3 che passa i 9 punti nominati:

$$C_{6m} = r\, C_{3s} \qquad (6m = 3rs)$$

oppure

$$C_{6m} = r\, C_{3s} + C_3 \ (^1) \qquad (6m = 3rs + 3).$$

Allora le immagini delle curve canoniche sul piano doppio saranno curve $C_{3n} = C_{3m-3}$ composte colle C_{3s} e colle C_3,

$$C_{3m-3} = x\, C_{3s} + y\, C_3 .$$

(1) Questo resultato non è a priori evidente come si potrebbe credere pel fatto che le C_{3s} debbono rappresentare curve ellittiche. Nella C_{2n+6} potrebbero invero entrare come parti delle componenti della C_3 supposta spezzata.

L'equazione d'analisi indeterminata

$$3m - 3 = 3sx + 3y,$$

deve essere risolta prendendo il massimo valore di x che è

$$x = \left[\frac{m-1}{s}\right],$$

ossia rispettivamente

$$x = \left[\frac{rs-2}{2s}\right] \quad \text{o} \quad x = \left[\frac{rs-1}{2s}\right].$$

Sarà quindi

$$p_g = x + 1.$$

Tuttavia il numero virtuale delle C_{3m-3} è sempre 1, così il genere numerico del piano doppio vale in tutti i casi $p_n = 1$.

In quanto alla determinazione delle curve bicanoniche, e quindi del bigenere, del piano doppio, osserviamo che la C_{6m} di diramazione unita ad una C_{3m-6} aggiunta alle C_{3m-3} immagini delle curve canoniche, rappresenta appunto una curva bicanonica. Questa osservazione si può stabilire, sia come corollario di una proposizione generale che si dimostra appoggiandosi alle proprietà fondamentali delle curve canoniche e bicanoniche, sia direttamente per questo caso, giacchè, indicata con $f(xy) = 0$ l'equazione della C_{6m}, si può verificare che il piano $z = 0$ fa parte di una superficie d'ordine $2(6m-4)$ biaggiunta rispetto alla

$$z^2 = f(xy).$$

Dalla osservazione precedente si ricava che le curve bicanoniche non sono rappresentate doppiamente, ma solo semplicemente sul nostro piano doppio; l'ordine delle immagini ($C_{12(m-1)}$) delle curve bicanoniche sarà dunque $4(3m-3)$, essendo $3m-3$ l'ordine delle immagini (doppie) delle curve canoniche, e similmente la molteplicità delle $C_{12(m-1)}$, in ogni punto $2m^{\text{plo}}$ di C_{6m}, sarà $4(m-1)$. Da ciò si deduce che le $C_{12(m-1)}$ debbono resultare composte colle C_{3s} ed eventualmente anche (per $s > 1$) colle C_3:

$$C_{12(m-1)} = u\,C_{3s} + v\,C_3.$$

L'equazione d'analisi indeterminata in u, v,

$$12(m-1) = 3su + 3v,$$

deve essere risolta prendendo il massimo valore intero di u, che è

$$u = \left[\frac{4(m-1)}{s}\right],$$

ossia rispettivamente

$$u = \left[\frac{2rs - 4}{s}\right] \quad \text{o} \quad u = \left[\frac{2rs - 3}{s}\right].$$

Ma, in generale, non tutte le $C_{12(m-1)}$ così composte, saranno immagini di curve bicanoniche del piano doppio, e quindi il bigenere P potrà resultare inferiore ad $u + 1$.

Si osservi infatti, che ogni C_{3s} (entrando come parte variabile nell'immagine di qualche curva bicanonica) rappresenta *due* curve ellittiche K sopra la superficie riferita al piano doppio. Ora le K formano su questa superficie un fascio, avente un certo genere π, e le parti variabili delle curve bicanoniche costituiscono i gruppi di una serie lineare completa g_u^{P-1} nell'ente ∞' (fascio) che ha per elementi le K, onde se $\pi > 0$

$$P - 1 < u.$$

Il genere π del fascio si può valutare tenendo conto del numero r delle C_{3s} che entrano a comporre la C_{6m}. Invero l'ente fascio contiene una g'_2 costituita dalle coppie di K rappresentate sopra una stessa C_{3s}; gli elementi di coincidenza della g'_2 sono costituiti dalle C_{3s} che fanno parte di C_{6m} ed eventualmente anche (per $s > 1$) dalla cubica C_3 che passa pei 9 punti base delle C_{3s}; si avrà dunque

$$2 + 2\pi = r \quad \text{o} \quad 2 + 2\pi = r + 1,$$

secondo la parità o disparità di r, cioè

$$\pi = \left[\frac{r - 1}{2}\right].$$

Ma poichè, in tutti i casi,

$$u \geq 2 + 2\pi \qquad (\text{essendo } 3rs \geq 12),$$

la serie g_u^{P-1} è non speciale, sicchè

$$P - 1 = u - \pi.$$

Si deduce rispettivamente

$$P = \left[\frac{2rs - 4}{s}\right] - \left[\frac{r - 3}{2}\right] \quad \text{o} \quad P = \left[\frac{2rs - 3}{s}\right] - \left[\frac{r - 3}{2}\right].$$

Si presentano dunque i seguenti casi:

1) La C_{6m} è composta di $r = 2m$ cubiche d'un fascio ($s = 1$, $r = 2m$)

$$p_g = m = \left[\frac{r + 1}{2}\right] \qquad P = 3m - 2 = \frac{3r - 4}{2}.$$

2) La C_{6m} è composta di $r=m$ sestiche C_6 aventi 9 punti doppi comuni

$$p_g=\left[\frac{r+1}{2}\right] \qquad P=\left[\frac{3r}{2}\right].$$

3) La C_{6m} è composta di $r\, C_9$ con 9 punti 3[pli] comuni, ed eventualmente anche (per r dispari) della C_3 che passa per essi

$$p_g=\left[\frac{r+1}{2}\right] \qquad P=\left[\frac{3r+1}{2}\right].$$

4) La C_{6m} è composta di $r\, C_{3s}$ $(s>3)$ con 9 punti s[pli] comuni, ed eventualmente anche (per r ed s dispari) della C_3 che passa per essi

$$p_g=\left[\frac{r+1}{2}\right] \qquad P=\left[\frac{3r+2}{2}\right].$$

Matematica. — *Le forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte* (1). Nota del dott. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

1. Diremo che due forme lineari alle differenze $A(y)$, $B(y)$, sono *equivalenti* quando ammettono uno stesso sistema fondamentale di integrali: $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Se, per maggior generalità, ammettiamo che nelle forme che fanno oggetto del nostro studio possano insieme comparire le potenze positive e le negative del simbolo operativo θ, e se θ^{-r} e θ^{-s} sono le massime potenze negative che si hanno nelle espressioni di $A(y)$, $B(y)$, dovremo avere:

$$(1)\ A(y)=c_1\begin{vmatrix} \theta^{-r}y, & \theta^{-r}y_1, & \dots, & \theta^{-r}y_n \\ \theta^{-r+1}y, & \theta^{-r+1}y_1, & \dots, & \theta^{-r+1}y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y, & y_1, & \dots, & y_n \\ \theta y, & \theta y_1, & \dots, & \theta y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{n-r}y, & \theta^{n-r}y_1, & \dots, & \theta^{n-r} \end{vmatrix}, \quad B(y)=c_2\begin{vmatrix} \theta^{-s}y, & \theta^{-s}y_1, & \dots, & \theta^{-s}y_n \\ \theta^{-r+1}y, & \theta^{-s+1}y_1, & \dots, & \theta^{-s+1}y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y, & y_1, & \dots, & y_n \\ \theta y, & \theta y_1, & \dots, & \theta y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{n-s}y, & \theta^{n-s}y_1, & \dots, & \theta^{n-s}y_n \end{vmatrix}$$

con c_1 e c_2 costanti per la operazione θ.

(1) Questa Nota fa seguito ad un'altra pubblicata nel vol. V, 1° sem. 1896, serie 5ª, di questi Rendiconti col titolo: *La forma aggiunta di una data forma lineare alle differenze.*

Se ne ricava:

$$(2) \qquad \frac{1}{c_1}\theta^r A(y) = \frac{1}{c_2}\theta^s B(y) = \begin{vmatrix} y & , y_1 & , \dots , y_n \\ \theta y & , \theta y_1 & , \dots , \theta y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^n y & , \theta^n y_1 & , \dots , \theta^n y_n \end{vmatrix}$$

D' onde si conclude:

Se $A(y)$ *e* $B(y)$ *sono forme equivalenti, e sono* s *ed* r *le massime potenze negative di* θ *che si trovano nelle espressioni di* $A(y)$ *e* $B(y)$, *si dovrà avere identicamente:*

$$(3) \qquad \theta^s A(y) = k\,\theta^r B(y)\,,$$

con k *costante per la operazione* θ.

2. Si noti a questo proposito che le forme $A(y)$, $\theta^r A(y)$ sono equivalenti al senso superiormente detto, ma non sono, in generale, identiche, e che le loro aggiunte rispettive $\overline{A(y)}$, $\overline{A}\theta^{-r}(y)$ non sono equivalenti fra di loro a meno che le operazioni $\overline{A}$ e θ^{-r} non sieno commutabili.

Per questa ragione, la proprietà della forma

$$A = G \,.\, \overline{G}\,,$$

prodotto di due aggiunte l' una dell' altra, di coincidere con la sua aggiunta (1), non appartiene nè alle forme $\theta^r A$, nè in generale alle altre forme equivalenti alla A.

Vogliamo qui invece studiare la natura dei legami che si debbono imporre agli integrali dei sistemi fondamentali di una forma, perchè questa sia equivalente alla sua aggiunta, per modo che, una tale proprietà, dovrà esser comune anche a tutte le altre forme equivalenti alla data.

3. Dalla definizione data di equivalenza e da quanto è stato dimostrato dal prof. Pincherle nella sua *Algebra delle forme lineari alle differenze* (2) ai § 11 e 12, ne viene che:

Due forme lineari alle differenze sono equivalenti quando ammettono una stessa scomposizione in fattori del primo ordine.

Se ne deduce poi, con facile ragionamento, che:

Se due forme $A(y)$, $B(y)$, *sono equivalenti, e sono rappresentabili come prodotti di due fattori* $A_1A_2(y)$, $B_1B_2(y)$, *dei quali i due primi* $A_1(y)$, $B_1(y)$, *sono fra loro equivalenti, lo saranno anche gli altri due, e reciprocamente.*

(1) Cfr. il n. 2, e) della nota citata: *La forma aggiunta* ecc. Vedi anche il teor. IV dato dal prof. Pincherle nella nota: *Sull'operazione aggiunta*, letta alla Acc. di Bologna il 17 aprile 1898.

(2) Memorie dell' Acc. delle Sc. di Bologna, a. 1895.

Ed in conseguenza di ciò si conclude che

Se i prodotti $A_1A_2A_3(y)$, $B_1B_2B_3(y)$, *sono equivalenti, e sono equivalenti, ciascuno a ciascuno, i fattori* $A_1(y)$, $A_3(y)$, *del primo, ai fattori* $B_1(y)$, $B_3(y)$ *dell'altro, anche i rimanenti fattori* $A_2(y)$, $B_2(y)$, *sono fra loro equivalenti.*

4. Sieno ora le due forme aggiunte:

$$(4) \qquad \begin{cases} A(y) = a_0 y + a_1 \theta y + \cdots + a_n \theta^n y \\ \overline{A}(y) = a_0 y + \theta^{-1} a_1 \,.\, \theta^{-1} y + \cdots + \theta^{-n} a_n \,.\, \theta^{-n} y \,. \end{cases}$$

Se vogliamo che queste forme sieno equivalenti, dovremo, in forza della formula (3), avere la identità:

$$A(y) = k \,.\, \theta^n \overline{A}(y) \,,$$

e cioè:

$$(5) \quad a_0 y + a_1 \theta y + \cdots + a_n \theta^n y = k(a_n y + \theta a_{n-1} \,.\, \theta y + \cdots + \theta^n a_0 \,.\, \theta^n y).$$

Da cui le formule:

$$(6) \qquad \begin{cases} a_r = k \theta^r a_{n-r} \\ (r = 0 \,, 1 \,, \ldots n) \,. \end{cases}$$

5. Nel caso di n pari ed eguale a $2m$, pel coefficiente del termine medio si ha la relazione:

$$(7) \qquad a_m = k \theta^m a_m \,,$$

e scrivendo:

$$(8) \qquad a_m = 2a'_m$$

si ha ancora

$$(9) \qquad a'_m = k \theta^m a'_m$$

ed allora, per le relazioni (6) e (9), potremo scrivere:

$$A(y) = a_0 y + a_1 \theta y + \cdots + a'_m \theta^m y + k \theta^m (a'_m y + \theta a_{m-1} \,.\, \theta y + \cdots \theta^m a_0 \theta^m y) \,.$$

E ponendo:

$$(10) \qquad G(y) = a_0 y + a_1 \theta y + \cdots + a'_m \theta^m y$$

avremo

$$A(y) = G(y) + k \theta^m \,.\, \theta^m \,.\, \overline{G}(y)$$

cioè:

$$(11) \qquad A(y) = G(y) + k \theta^n \overline{G}(y) \,.$$

Se nel caso di n dispari ed eguale a $2m + 1$ poniamo similmente:

$$(12) \qquad G(y) = a_0 y + a_1 \theta y + \cdots + a_m \theta^m y \,,$$

avremo:

$$A(y) = G(y) + k \theta^{m+1} \theta^m \overline{G}(y)$$

e cioè anche in questo caso:

$$A(y) = G(y) + k\theta^n \overline{G}(y) . \tag{11}$$

Si conclude dunque:

Una forma lineare alle differenze dell'ordine n equivalente alla sua aggiunta si può sempre rappresentare come somma di due forme di cui l'una è equivalente al prodotto della aggiunta dell'altra per la operazione θ^n.

6. Dalle formule (6) si ricava, con facile sostituzione:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_r = k^2 \theta^n a_r , \quad \theta^n a_r = \frac{1}{k^2} a_r \\ (r = 0 , 1 , \dots , n) \end{array} \right. \tag{13}$$

Da cui: *In una forma equivalente alla sua aggiunta, i coefficienti sono funzioni che per effetto della operazione θ^n acquistano il fattore costante $\frac{1}{k^2}$.*

Sia ora y_1 un integrale di una tale forma; avremo identicamente:

$$\sum_{r=0}^{n} a_r \, \theta^r y_1 = 0$$

ed applicando la operazione θ^n, tenendo poi conto delle relazioni (13), avremo anche

$$\sum_{r=0}^{n} a_r \, . \, \theta^{n+r} y_1 = 0 ,$$

e cioè

$$\sum_{r=0}^{n} a_r \, \theta^r (\theta^n y_1) = 0 .$$

Da cui:

Se y_1 è integrale di una forma lineare alle differenze di ordine n equivalente alla sua aggiunta, anche $\theta^n y_1$ è integrale di quella forma.

7. Dalla relazione

$$A(y) = a_0 y + a_1 \theta y + \cdots + a_n \theta^n y = c \begin{vmatrix} y \, , \theta y \, , \dots , \theta^{n-1} y \, , \theta^n y \\ y_1 \, , \theta y_1 \, , \dots , \theta^{n-1} y_1 \, , \theta^n y_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n \, , \theta y_n \, , \dots , \theta^{n-1} y_n \, , \theta^n y_n \end{vmatrix} \tag{14}$$

si ricava:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = c \, |\theta^{r+1} y_s| \\ a_n = (-1)^n \, c \, |\theta^r y_s| \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} r = 0 , 1 , \dots , n-1 \\ s = 1 , 2 , \dots , n \end{pmatrix} . \tag{15}$$

Da cui:

$$a_0 = (-1)^n \theta a^n . \tag{16}$$

E per le (6), avremo:

$$\theta a_n = (-1)^n k a_n , \quad \theta a_0 = (-1)^n k . a_0 \tag{17}$$

d'onde:

$$\theta^n a_n = (-1)^n k^n a_n .$$

Ma, per le (13), si ha:

$$\theta^n a_n = \frac{1}{k^2} a_n ,$$

avremo dunque:

$$\frac{1}{k^2} = (-1)^n k^n , \text{ ossia } k^{n+2} = (-1)^n . \tag{18}$$

Il fattore costante k per cui possono differire le due forme $\mathrm{A}(y)$ *e* $\theta^n \overline{\mathrm{A}}(y)$ *nel caso che esse sieno equivalenti fra di loro, deve dunque essere radice della equazione binomia*

$$x^{n+2} - (-1)^n = 0 . \tag{19}$$

8. Al n. 5 del precedente lavoro sulle forme aggiunte, ho dimostrato che:

Se $y_1 , y_2 , \dots , y_n$, $z_1 , z_2 , \dots , z_n$, sono sistemi fondamentali aggiunti [1] di due forme aggiunte, considerando le due matrici:

$$\left\{\begin{array}{llll} y_1 & , y_2 & , \dots , & y_n \\ \theta y_1 & , \theta y_2 & , \dots , & \theta y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{n-1} y_1 & , \theta^{n-1} y_2 & , \dots , & \theta^{n-1} y_n \end{array}\right. \quad \begin{array}{llll} \theta^{-(n-1)} z_1 & , \theta^{-(n-1)} z_2 & , \dots , & \theta^{-(n-1)} z_n \\ \theta^{-(n-2)} z_1 & , \theta^{-(n-1)} z_2 & , \dots , & \theta^{-(n-2)} z_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1 & , z_2 & , \dots , & z_n \end{array} , \tag{20}$$

i minori formati con le prime p linee della prima sono eguali ai complementari dei minori corrispondenti nella seconda moltiplicati pel fattore costante:

$$\left\{\begin{array}{l} (-1)^{\frac{(n-p+1)(n-p)}{2}} \left| \theta^r y_s \right| \\ \begin{pmatrix} r = 0 , 1 , \dots , n-1 \\ s = 1 , 2 , \dots , n \end{pmatrix} \end{array}\right. .$$

Se ora, come sistema $z_1 , z_2 , \dots z_n$, possiamo scegliere il sistema $\theta^n y_1 , \theta^n y_2 , \dots \theta^n y_n$, avremo le formule:

$$\sum \pm y_1 . \theta y_2 \dots \theta^{p-2} y_{p-1} = \tag{21}$$

$$\theta \sum \pm \theta^{p-1} y_p . \theta^p y_{p+1} \dots \theta^{n-1} y^p . (-1)^{\frac{(n-p-1)(n-p)}{2}} \sum \pm y_1 . \theta y_2 \dots \theta^{n-1} y_n .$$

[1] Cfr. il n. 5 della nota citata *La forma aggiunta* ecc.

Cioè: *I minori formati con le prime p linee della matrice*:

$$\begin{matrix} y_1 & , y_2 & , \ldots , y_n \\ \theta y_2 & , \theta y_2 & , \ldots , \theta y_n \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \theta^{n-1} y_1 & , \theta^{n-1} y_2 & , \ldots , \theta^{n-1} y_n , \end{matrix}$$

sono proporzionali al prodotto dei loro complementari per la operazione θ.

Continuando ad usare la notazione:

$$\Gamma_m = | \theta^r y_s | \quad \begin{pmatrix} r = 0 , 1 \ldots m-1 \\ s = 1 , 2 \ldots m \end{pmatrix}$$

introdotta nella nota precedente, rappresentando con $\Gamma_{r,s}$ i minori formati con le prime p linee, e con $D_{r,s}$ i loro complementari, avremo

$$\sum_{r,s} \Gamma_{r,s} \,.\, D_{r,s} = \Gamma_n \tag{22}$$

ma poichè

$$\theta D_{r,s} = \frac{\Gamma_{r,s}}{\Gamma_n}$$

ossia

$$D_{r,s} = \frac{\theta^{-1} \Gamma_{r,s}}{\theta^{-1} \Gamma_n} ,$$

dovremo avere:

$$\sum_{r,s} \Gamma_{r,s} \,.\, \theta^{-1} \Gamma_{r,s} = (-1)^{\frac{(n-p-1)(n-p)}{2}} \Gamma_n \,.\, \theta^{-1} \Gamma_n \,. \tag{23}$$

In particolare, per $p = 1$ si ha:

$$\sum_{r=1}^{n} y_r \,.\, \theta^{-1} y_r = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \Gamma_n \,.\, \theta^{-1} \Gamma_n \,. \tag{24}$$

9. Se indichiamo ancora con $y_1 , y_2 \ldots y_n$ un sistema fondamentale della $A(y)$, e con $z_1 , z_2 , \ldots , z_n$ il suo sistema aggiunto, per la equivalenza delle due forme $A(y) , \bar{A}(y)$, occorre che le $\theta^n y_1 , \theta^n y_2 \ldots \theta^n y_n$, si possano ottenere delle $z_1 , z_2 , \ldots z_n$, con una sostituzione lineare a coefficienti costanti ed a determinante diverso da zero.

I due determinanti $\theta \Gamma (y_1 , y_2 \ldots y_n)$ e $\Gamma_{-1} (z_1 , z_2 \ldots z_n)$ non potranno perciò differire che per un fattore costante h.

Tenuto conto di questo, dalle formule (21), per $p = 0$, si ricava:

$$\Gamma_n \,.\, \theta \Gamma_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} h , \tag{25}$$

e, per le (15),

$$(-1)^n \frac{a_n}{c} \cdot (-1)^n \frac{\theta a_n}{c} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} h,$$

cioè

(26) $$a_n \theta a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot c^2 h.$$

D' altra parte, per le (14), si ha:

$$a_n \theta a_n = (-1)^n k a_n^2,$$

dunque

$$(-1)^n k a_n^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} c^2 h,$$

ed infine

(27) $$a_n^2 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{c^2 h}{k}.$$

Poichè c, k ed h sono costanti per la operazione θ, tale sarà anche a_n^2 e si avrà:

(28) $$\theta a_n^2 = a_n^2,$$

e per essere la operazione θ distributiva anche per la moltiplicazione:

$$(\theta a_n)^2 = a_n^2,$$

ed infine

(29) $$\theta a_n = \pm a_n.$$

Cioè *il coefficiente* a_n *è alternante per le operazioni del gruppo formato dalla* θ *e dalle sue potenze.*

Si ha però, dalle (17):

$$\theta a_n = (-1)^n k a_n;$$

dunque si conclude:

(30) $$k = \pm 1.$$

Siccome poi deve aversi

$$k^{n+2} = (-1)^n,$$

si conclude che, *per* n *dispari deve essere* $k = -1$, e rimane indeterminato il segno di k per n pari.

10. Dalle formule (13), per la determinazione fatta di k^2, si ricava:

(31) $$a_r = \theta^n a_r \quad (r = 1, \dots, n)$$

e cioè: *In una forma lineare alle differenze equivalente alla sua aggiunta*

tutti i coefficienti sono costanti per la operazione θ^n; cioè sono funzioni periodiche della variabile x ed hanno tutte il medesimo periodo n. *Le forme alle differenze equivalenti alla loro aggiunta, sono dunque forme periodiche, ed i loro integrali sono anche integrali di forme a coefficienti costanti e di ordine* n^2 (¹). Di qui, per la formula (14), si deduce ancora che: *Se* $y_1, y_2, \dots y_n$, *è un sistema fondamentale comune ad una forma alle differenze ed alla sua aggiunta, tutti i determinanti di ordine n contenuti nella matrice:*

$$\begin{matrix} y_1, \theta y_1, \dots, \theta^n y_1 \\ y_2, \theta y_2, \dots, \theta^n y_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n, \theta y_n, \dots, \theta^n y_n \end{matrix}$$

sono invarianti per la operazione θ^n.

Si consideri poi che dalla eguaglianza $V_n = (-1)^n \frac{a_n}{c}$ *si deduce che il determinante*

$$V_n = |\theta^r y_s| \quad \begin{pmatrix} r = 0, 1 \dots n-1 \\ s = 1, 2 \dots n \end{pmatrix}$$

è invariante per la operazione θ, *tanto nel caso di n dispari quanto nel caso in cui n sia pari e sia* $k = 1$. *È alternante solo nel caso che sia n pari e* $k = -1$.

Nei primi due casi si ha, dalle formole (25):

$$V_n^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{33}$$

ossia:

$$V_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{4}}$$

e nell'ultimo caso si ha:

$$V_n^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)+2}{2}} \tag{34}$$

$$V_n = (-1)^{\frac{n(n-1)+2}{4}}.$$

Sostituendo questi valori nelle formule (23) si hanno le relazioni

$$\sum_{r.s} V_{r,s}\, \theta V_{r,s} = \pm 1$$

ed in particolare:

$$\sum_{r=1}^{n} y_r\, \theta y_r = (-1)^{n-1}. \tag{35}$$

(¹) Cfr. *Un contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze.* Annali di Matematica, 1895.

11. Nel caso di n dispari, dalle formule (5), (6), (17), si ricavano le altre:

$$(36)\qquad \begin{cases} A(y) = -\,\theta^n \bar{A}(y) \\ \theta a_n = a_n\,, \quad \theta a_0 = a_0 \\ a_0 = -\,a_n \\ a_r = -\,\theta^r a_{n-r} \quad (r = 1\,, 2\,, \dots n-1) \\ A(y) = G(y) - \theta^n \bar{G}(y)\,. \end{cases}$$

Da cui in particolare si deduce che *una forma lineare alle differenze di grado dispari equivalente alla sua aggiunta è identica al prodotto di questa per la operazione θ^n cambiato di segno, e che i coefficienti del primo e dell'ultimo termine sono invarianti per la operazione θ, e sono fra di loro eguali ma contrari di segno.*

12. Nel caso di n pari si hanno i due sistemi di formule:

$$(37)\qquad \begin{cases} A(y) = \theta^n \bar{A}(y) & A(y) = -\,\theta^n \bar{A}(y) \\ \theta a_n = a_n\,, \quad \theta a_0 = a_0 & \theta a_n = -\,a_n \quad \theta a_0 = -\,a_0 \\ a_0 = a_n & a_0 = -\,a_n \\ a_r = \theta^r a_{n-r} \quad (r = 1\,, 2 \dots n-1) & a_r = -\,\theta^r a_{n-r} \quad (r = 1\,, 2 \dots n-1) \\ A(y) = G(y) + \theta^n \bar{G}(y) & A(y) = G(y) - \theta^n \bar{G}(y) \end{cases}$$

delle quali, se nella forma data si suppone costante il coefficiente dell'ultimo termine (d'ordinario si suppone $a_n = 1$), solo il sistema di sinistra dovrà ritenersi valido e si concluderà che: *Le forme di grado pari equivalenti alle loro aggiunte, sono direttamente eguali al prodotto di queste per la operazione θ^n ed in esse sono direttamente eguali fra di loro i coefficienti del primo e dell'ultimo termine.*

Fisica terrestre. — *Il terremoto dell'India del 12 giugno 1897 registrato in Europa.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

Circa $^1/_4$ d'ora dopo il mezzogiorno del 12 giugno, cominciarono ad essere perturbati gli strumenti di gran numero d'Osservatorî italiani, e la perturbazione raggiunse in breve proporzioni veramente straordinarie e non cessò che lungo tempo appresso. Perturbazioni analoghe avvennero nella maggior parte dei magnetografi ed in altri delicati strumenti disseminati qua e là in Europa.

Il fatto che il movimento passò inavvertito alle persone, ed il genere stesso della registrazione da parte degli strumenti stavano a provare che doveva trattarsi d'un terremoto disastroso avvenuto in lontane contrade. Il giorno

appresso, infatti, si seppe dai giornali politici che un violentissimo terremoto era stato sentito a Calcutta nel pomeriggio del 12 giugno. Notizie più particolareggiate si conobbero poco a poco più tardi dai giornali scientifici.

In attesa delle relazioni complete che certamente non mancheranno di essere pubblicate, di qui a qualche tempo, sopra questo avvenimento sismico di straordinaria importanza, e prima ch' io venga a discutere le osservazioni fatte in Europa, credo utile di premettere alcuni dati che potranno per il momento essere interessanti e che in buona parte sono tratti da uno studio preliminare del dott. Oldham (1).

Sembra che i danni siano limitati alla parte centrale ed occidentale dell'Assam ed a quasi tutto il Bengala propriamente detto, sopratutto al confine coll'Assam; vale a dire entro la vasta zona che dal versante meridionale dell' Imalaia si estende al sud fino al golfo del Bengala. Per quanto imperfette siano le attuali conoscenze circa le vere dimensioni e la forma dell'area macrosismica, non si può fare a meno di restare meravigliati dinanzi l'enorme estensione dell'area, entro cui il terremoto ha prodotto devastazioni più o meno considerevoli. Ed invero, si trova una distanza di circa 900 km. da Jorhat a Patna in direzione E-W e di circa 600 da Darjeeling a Balasor in direzione press' a poco trasversale. Sembra che la forza distruttiva abbia toccato il suo massimo a *Cherra Punji* (lat. 25° 20′ N, long. 91° 40′ E Green.), a *Teura* (25° 30′, 90° 10′) e *Shillong*. Però, le prime relazioni furono esagerate in ciò che si riferisce ai danni, i quali furono senza dubbio assai serî, ma non eccezionalmente grandi. Tutto ciò, congiunto al fatto dell'enorme estensione dell'area colpita, fa ragionevolmente supporre che il focolare sismico si trovi a grande profondità e, secondo il prof. Omori (2), a non meno d' una quarantina di chilometri.

In quanto alla causa del terremoto, il sig. La Touche (3) ha espresso l'opinione ch'essa debba ricercarsi nel movimento avvenuto lungo una faglia che passando pel versante meridionale dei monti Garo e Khasi va fino a Cachar all' E fino al di là del Brahmaputra. Il dott. Oldham crede ad una possibile connessione tra questo terremoto ed il sollevamento continuo dell' Imalaia. Infine, il prof. Omori ritiene che l'origine della commozione sismica debba ricercarsi nella subitanea frattura di strati causata da una iniezione di vapori o di gas entro le fessure esistenti nella crosta terrestre.

Se ciò fosse, l'epicentro dovrebbe essere ben altrimenti che un punto. Comunque sia, noi riterremo in una prima approssimazione che esso si trovi

(1) Giornale inglese *Nature*, vol. 56, n. 1446 (15 luglio 1897, pag. 252) e n. 1455 (16 settembre 1897, pag. 471). — Giornale francese *Cosmos*, anno 46°, n. 663 (9 ottobre 1897, pag. 451).

(2) *Nature*, vol. 57, n. 1464 (18 novembre 1897, pag. 59).

(3) *Nature*, vol. 56, n. 1447 (22 luglio, pag. 273) e n. 1454 (9 settembre 1897, pag. 444).

alla lat. di 25° N ed alla long. 91° E Green.; e per quanto questa posizione possa essere sbagliata, potrà tuttavia esserci di aiuto nel trarre in seguito alcune importanti deduzioni, tenuto conto dell'estensione straordinaria che ha avuta il terremoto. Le località più lontane finora conosciute, ove il movimento fu più o meno sentito, sono: *Akyab, Magwe* e pare anche *Pegu* in Birmania, rispettivamente a circa 600 e 1000 km. verso SSE; *Mogott* (Birmania) a 600 verso ESE; *Lahassa* a 500 verso N; *Dharmsala* a più di 1100 e *Simla, Panipat* e *Dehli* a circa 1600 verso NW; *Agra* e *Ajmere* rispettiv. a 1300 e 1600 verso WNW; *Mont Abu* e *Ahemedabad* a 1800 e 1900 verso W; *Ellichpore* e *Surat* rispettiv. a 1500 e 1900 verso WSW; *Masulipatam* e pare anche *Madras* rispettiv. a 1500 e 1800 km. verso SW. Stando a questi limiti, non si andrà molto lontani dal vero col ritenere che tutta l'area scossa sia racchiusa da un cerchio di ben 1200 km. di raggio, ciò che darebbe una superficie di circa 4 ½ milioni di km. quadrati! Poichè il centro di questo cerchio cade a circa 700 km. SW dal presunto epicentro, ciò proverebbe che la propagazione s' è fatta maggiormente verso il SW.

Sembra che la durata della scossa sia stata di due minuti a Shillong, presso l'epicentro, e probabilmente non meno di sei minuti a Calcutta. Anche volendo accettare quest' ultimo valore, d' altronde assai elevato, esso non potrebbe mai render ragione dell'enorme durata della perturbazione registrata dagli strumenti in Europa, i quali sono rimasti agitati per più ore di seguito. È vero bensì che alla 1ª grande scossa tennero dietro da 300 a 400 repliche entro le prime 24 ore; ma tutte furono meno forti, e le più importanti tra esse, avvenute successivamente circa $2^h \, ^1/_2$, $4^h \, ^3/_4$, $5^h \, ^1/_2$, 10^h e $10^h \, ^3/_4$ dopo la 1ª, non è sicuro che siano riuscite a perturbare gli strumenti europei.

La perturbazione sismica che ha cominciato in Europa verso le $12^h \; 17^m$ (t. m. dell' Eur. Centr.) ha presentate diverse fasi, le quali si rintracciano, con variazioni più o meno grandi dovute alla diversità degli strumenti, nelle varie località. Così, alcuni rinforzi si notano intorno alle $12^h \; 22^m$, $12^h \; 27^m$, $12^h \; 31^m$. In questa prima parte della registrazione sembra che il periodo oscillatorio del suolo sia stato piuttosto lento, e d'appresso le indicazioni dei sismometrografi di Roma — muniti del registratore a doppia velocità, e dove la zona di carta si è svolta perciò rapidamente durante il fenomeno — sembra che da principio non sia stato neppure inferiore a ½ secondo e poi sarebbe andato ancor crescendo. Ma verso le $12^h \; 40^m$, e forse anche prima, il carattere della registrazione cambia totalmente, poichè sottentrano ondulazioni ben più lente le quali raggiungono la massima ampiezza verso le $12^h \; 47^m \, ^1/_2$. Stando ai migliori dati, il periodo semplice d'oscillazione di siffatte ondulazioni s'aggira sui 10 secondi e la deviazione apparente della verticale sarebbe stata al loro passaggio di una dozzina di secondi d'arco. Dopo questa, altre fasi ben caratteristiche e comuni a molti Osservatorî non esistono, ed il movi-

mento dopo varie vicende si estingue più o meno tardi nei varî strumenti a seconda della loro sensibilità.

Secondo il sig. La Touche, le osservazioni più attendibili fatte a Calcutta dànno per il principio del fenomeno 16^h 58^m (t. m. l.) corrispondenti perciò a 12^h $4^m,6$ (t. m. E. C.). Da una comunicazione avuta dallo stesso dottore Oldham, l'ora sarebbe 11^h 7^m (t. m. Green.) cioè 12^h 7^m (t. m. E. C.). Infine, due orologi dell'osservatorio di Adipur s'arrestarono l' uno a 17^h 4^m 22^s e l'altro a 17^h 4^m 26^s; ma non sapendosi in che tempo sono espresse queste ultime due ore nè la località a cui si riferiscono, non è prudente di prenderle in considerazione.

A Bombay il principio della perturbazione in quel magnetografo avvenne a 17^h 4-5^m (t. m. l.) ossia a 12^h $12^m,7$-$13^m,7$ (t. m. E. C.). Confrontando quest'ora con le due sopra riportate per Calcutta, e tenendo conto che questa città si trova a circa 400 km. dal presunto epicentro, mentre Bombay ne dista quasi 2000, si otterrebbe nel 1° caso una velocità media superficiale di 2,9-3,3 km. al secondo, e di 4-4,7 km. nel 2°. Il 1° di questi valori s'accorderebbe bene con quello di circa 3 km. che il dott. Oldham ha calcolato in via provvisoria, basandosi sopra alcuni dati orarî soltanto, presi a caso tra i più esatti.

Attendendo il risultato definitivo che il dott. Oldham ed altri otterranno per ciò che riguarda la velocità del terremoto attraverso tutta l'area colpita, non credo inutile di dare anche un' idea della rapidità colla quale le onde sismiche si sono propagate fino in Europa. A tale scopo riporto nel seguente quadro i migliori dati che si posseggono per l' Europa, relativi al principio della perturbazione, e nello stesso tempo le distanze delle varie località dal presunto epicentro. Nell' ultima colonna si trovano le velocità medie e superficiali che si ottengono dal confronto delle ore riportate con le due di Calcutta.

DISTANZE dal presunto epicentro	LOCALITÀ	ORE (t. m. E. C.)		VELOCITÀ in Km. al secondo in base alla	
				prima ora di Calcutta	seconda ora di Calcutta
Km.		h	m	Km.	Km.
400	Calcutta.	12	4,6	—	—
		»	7,0	—	—
5980	Pietroburgo (Pawlowsk)	»	17,0	8,0	9,3
7020	Potsdam.	»	17,0	8,9	11,0
7150	* Catania	»	17,4	8,8	10,8
7150	Portici	»	17,9	8,5	10,3
7170	Mineo	»	16,0	9,9	12,5
7170	* Ischia.	»	17,2	9,0	11,1
7220	Spinea.	»	18,6	8,1	9,8
7240	* Padova	»	17,0	9,2	11,4
7250	Velletri	»	17,0	9,2	11,4

DISTANZE dal presunto epicentro	LOCALITÀ	ORE (t. m. E. C.)		VELOCITÀ in Km. al secondo in base alla prima ora di Calcutta	VELOCITÀ in Km. al secondo in base alla seconda ora di Calcutta
Km.		h	m	Km.	Km.
7250	* Rocca di Papa. . . .	12	17,5	8,9	10,9
7260	* Roma	"	17,1	9,2	11,3
7310	Firenze	"	18,0	8,6	10,5
7330	Wilhelmshaven. . . .	"	18,9	8,1	9,7
7390	Livorno	"	17,0	9,4	11,6
7440	Pavia	"	18,2	8,6	10,5
7560	Utrecht	"	17,0	9,6	11,9
7700	Grenoble	"	19,1	8,4	10,1
7840	Parigi (Parc St.-Maur)	"	27,6	5,4	6,0
7970	Edimburgo	"	18,0	9,4	11,5
		Media		8,3	10,6

La prima cosa che colpisce è la notevolissima velocità che vien fuori concordemente da tutte le località, anche basandosi sull'ora più bassa di Calcutta. Le piccole differenze possono dipendere o da qualche incertezza nella determinazione dell'ora, specie negli apparecchi a registrazione fotografica, dove la carta si muove con velocità insufficiente, o dalla diversa sensibilità e qualità degli strumenti. La più grande divergenza si osserva per Parigi, il cui magnetografo, per essere forse meno sensibile degli altri, non è stato visibilmente perturbato che al sopraggiungere delle onde sismiche abbastanza pronunciate appartenenti ad una fase già inoltrata. Prendendo in considerazione i soli valori che offrono maggior garanzia di esattezza, e sono i cinque forniti dalle località segnate con asterisco, si ottiene una velocità media di quasi 9 km. basandosi sulla 1ª ora di Calcutta e di 11 km. basandosi sulla 2ª. Sicchè nell'incertezza in cui ancora siamo in quanto alla vera ora relativa all'epicentro, si può dire in una prima approssimazione che le onde sismiche le più veloci sonosi propagate dall'India fino in Europa con una velocità di circa 10 km. Questo valore diverrebbe alquanto più piccolo nell'ipotesi che la propagazione, invece che alla superficie terrestre, si fosse fatta lungo la corda [1]; ma in questo caso la diminuzione sarebbe poco sensibile e soltanto di un decimo del valore primitivo.

Può essere anche interessante di formarsi un'idea della velocità colla quale si propagarono fino in Europa le onde sismiche a lentissimo periodo

[1] In tale ipotesi, le onde sismiche sarebbero passate, prendendo in considerazione la località la più lontana quale è Edimburgo, alla massima distanza di circa 1200 km. al disotto della superficie terrestre, la quale profondità costituisce quasi $^1/_5$ del raggio del globo.

oscillatorio di sopra accennate, e precisamente quelle che produssero la massima inclinazione del suolo intorno alle $12^h\ 47^m\ ^1/_2$. Nel seguente prospetto figurano tutte quelle località, con la loro rispettiva distanza dall'epicentro, per le quali s' è potuta stabilire con sufficiente esattezza l'ora del passaggio di dette onde più ampie. Nell' ultima colonna si trovano al solito le velocità medie e superficiali, quali si dedussero dal confronto delle due ore di Calcutta:

DISTANZE dal presunto epicentro	LOCALITÀ	ORE (t. m. E. C.)	VELOCITÀ in Km. al secondo in base alla prima ora di Calcutta	VELOCITÀ in Km. al secondo in base alla seconda ora di Calcutta
Km.		h m	Km.	Km.
400	Calcutta.	12 4,6	—	—
		» 7,0	—	—
5980	Pietroburgo.	» 40,5 (1)	2,59	2,78
7150	Catania	» 49,5 (2)	2,51	2,65
7150	Portici.	» 48,8 (3)	2,55	2,69
7170	* Ischia	» 47,5	2,63	2,78
7240	* Padova	» 47,5	2,66	2,81
7250	* Rocca di Papa. . . .	» 47,5	2,66	2,82
7260	* Roma	» 47,5	2,67	2,82
7330	Wilhelmshaven. . . .	» 50,4 (4)	2,52	2,66
7440	Pavia	» 47,5 (5)	2,73	2,90
7560	Utrech	» 55,0 (6)	2,37	2,49
7970	Edimburgo	» 50,0	2,78	2,93
		Media	2,61	2,76

Qui si vede che l'incertezza di circa $2\ ^1/_2$ minuti nell'ora di Calcutta si fa poco sentire sul risultato, il quale non cambia sensibilmente anche se si vogliano prendere in considerazione le sole 4 località contrassegnate con asterisco, per le quali il passaggio delle onde più ampie è stato assai più distinto. Possiamo dunque ritenere in cifra tonda che la velocità colla quale si sono propagate le più ampie ondulazioni del suolo, caratterizzate d'un lento periodo oscillatorio, è stata di circa 2,7 km., vale a dire quattro volte

(1) È la media dell'ora del principio ($12^h\ 39^m$) e della fine ($12^h\ 42^m$) della 2ª perturbazione su quel magnetografo.

(2) È l'ora del mass. sulla compᵉ. SE-NW del grande sismometrografo.

(3) È l'ora della massima ampiezza sulla comp.ᵉ S-N; non si conosce l'ora del mass. sull'altra E-W.

(4) È la fase massima della 2ª perturbazione nel declinometro.

(5) È press'a poco la media dell'ora ($12^h\ 45^m\ 43^s$) a cui hanno luogo le ondulazioni lente sulla comp.ᵉ N-S, e l'ora ($12^h\ 49^m\ 23^s$) a cui le medesime cominciano, assai più piccole, sull'altra comp.ᵉ E-W.

(6) È il massimo della 2ª perturbazione nel declinometro.

circa più piccola di quella sopra trovata, relativa alle prime onde sismiche resesi sensibili negli strumenti registratori.

Abbiam visto di sopra che il periodo semplice oscillatorio delle più ampie ondulazioni del suolo, di carattere lento arrivate in Europa verso le $12^h\ 47^m\ {}^1/_2$, è stato di circa 10 secondi, e poichè abbiamo trovato poc'anzi che la loro velocità media di propagazione è stata di circa 2,7 km. al secondo, ne consegue una lunghezza di 54 km. per l'onda completa o doppia λ. Con questo dato e conoscendo di già la massima inclinazione del suolo ($\alpha = 12''$) prodotta dal passaggio delle predette ondulazioni, ci è facile calcolarne ora la freccia A mediante la nota relazione

$$A = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{tang} \alpha$$ (1),

tirata dall'equazione della sinusoide

$$y = A \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Eseguito il calcolo, si trova $A = {}^1/_2$ metro, che rappresenterebbe il sollevamento e l'abbassamento del suolo al passaggio delle lente ondulazioni in parola.

Queste sono le principali conclusioni che si trovano in uno studio da me fatto sopra le registrazioni ottenute in Europa e specialmente in Italia, in occasione del terremoto indiano del 12 giugno, studio che sarà pubblicato tra breve nel *Boll. della Soc. Sismol. Italiana.*

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai signori D'Achiardi, Boccardo, Valenti, Langley.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La Società Reale di Londra; la Società di fisica e di storia naturale di Ginevra; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Sydney; la Società zoologica di Londra; il Museo di zoologia comparata di

(1) A. Cancani, *Sulle ondulazioni provenienti da centri sismici lontani.* Ann. dell'Ufficio centrale di Met. e Geod. Ital., serie 2ª, vol. XV, parte 1ª, 1893, pag. 13.

Cambridge Mass.; la Società geologica di Calcutta; l'Istituto Smithsoniano di Washington; l'Ufficio meteorologico e geodinamico di Vienna; la R. Scuola navale superiore di Genova.

Annunciano l' invio delle proprie pubblicazioni:

La R. Università di Roma; l'Istituto geografico-militare di Vienna; l'Osservatorio della Università di Chicago.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° maggio 1898.

Badesco C. — Une nouvelle méthode de traitement de l'occlusion et de l'invagination intestinale. Bucuresci, 1898. 4°.

Berlese A. — Osservazioni sopra particolari fenomeni che avvengono nella ninfosi dei muscidi. Firenze, 1898. 8°.

Boffito G. — Per la storia della meteorologia in Italia. Torino, 1898. 8°.

Boccardo E. C. e *Baggi V.* — Trattato completo di geometria pratica. Disp. 56-57. Torino, 1898. 8°.

D' Achiardi G. — Note di Mineralogia italiana. Pisa, 1898. 8°.

D' Araj A. — Discorso sopra il vivere sano e il vivere infermo del corpo umano in rapporto al corpo animale ecc. Napoli, 1898. 8°.

Id. — Nuova scienza. Sulla Natura. Napoli, 1898. 8°.

Delfino G. — La trisezione dell' angolo rettilineo in genere. Roma, 1898. 8°.

Erlenmeyer E. — Ueber pheny-α-amidomilchsäure. Leipzig. 1894. 8°.

Ferrucci A. — Il riscatto e l'esercizio di Stato delle ferrovie svizzere. Roma, 1898. 8°.

Id. — La statistica dell' esercizio delle reti Mediterranea e Adriatica. Roma, 1897. 8°.

Id. — L' ingegnere Dionisio Passerini Ispettore del Genio Civile. S. l. e a. 8°.

Grandis S. — Considerazioni tecniche ed economiche sul traforo delle Alpi. Torino, 1893. 4°.

Internationale Erdmessung — Das schweizerische Dreiecknetz herausgegeben von der Schweiz. geod. Kommission. Bd. VII. Zürich, 1897. 4°.

Langley S. P. — The Bolometer. New Haven, 1898. 8°.

Montano G. — Sul così detto « Mal della torta ». Napoli, 1898. 8°.

Müller J. H. H. — Forschungen in der Natur. I. Bakterien und Eumyceten. Berlin, 1898. 8°.

Piette E. e *De la Porterie J.* — Études d'ethnographie préhistorique. Fouailles à Brassempouy en 1896. Paris, 1897. 8°.

R. Scuola di Applicazione per gl' ingegneri in Napoli. Pubblicazione in occasione della Esposizone Nazionale di Torino. Napoli, 1898. 4°.

Saija. G. — Applicazione delle regole di Guldin e di Simpson alla ricerca pratica del del centro di gravità di un arco qualunque di curva omogenea piana. Acireale, 1898. 8°.

Tuccimei G. — Sopra alcuni cervi pliocenici della Sabina e della provincia di Roma. Roma, 1898. 8°.

Valenti G. — Sopra la piega faringea. Firenze, 1898. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 maggio 1898.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Sulla metilazione degli indoli.* Nota I. di G. Plancher, presentata dal Socio Ciamician.

Dalle ricerche istituite da E. Fischer [1] e proseguite in questo laboratorio risulta che dalla metilazione degli indoli prendono origine delle sostanze dotate di proprietà basiche, che dietro proposta dell' illustre chimico tedesco furono ritenute derivati della chinolina, e più precisamente furono dette *diidrochinoline.*

Di tutte le reazioni che conducono a tali prodotti, l' azione del ioduro di metile sull' indolo e sui suoi metilderivati e specialmente sul metilchetolo, e l' azione del ioduro di etile sopra quest' ultimo, sono le più studiate, e le basi che da esse traggono origine furono oggetto di lungo studio e di prolungate ricerche.

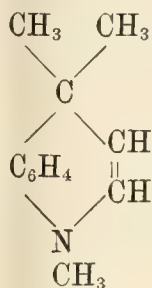
Nella prima reazione si forma quasi esclusivamente una base

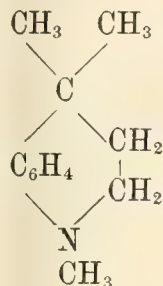
$$C_{12} H_{15} N \ (^2)$$

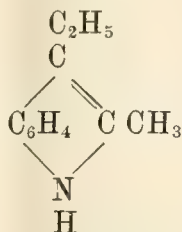
[1] E. Fischer e Steche, Ann. Chem., 242-349.

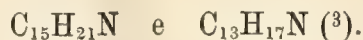
[2] Ibidem e E. Fischer e Meyer, Berl. Ber. 23-2628; Zatti e Ferratini, Gazz. Chim. Ital. 20-711.

che è nota sotto il nome di trimetildiidrochinolina e per la quale in seguito alle più recenti ricerche si era accettata la formola [1]

```
CH3   CH3
  \   /
    C
  /   \CH
C6H4    ||
  \   /CH
    N
    CH3
```

Essa ridotta assume due atomi di idrogeno e dà la tetraidrotrimetilchinolina corrispondente [2]

```
CH3   CH3
  \   /
    C
  /   \CH2
C6H4    |
  \   /CH2
    N
    CH3
```

Per l' azione del ioduro di etile sul metilchetolo, oltre ad un indolo che fu dimostrato, per mie esperienze tuttora inedite, identico all' etilmetilindolo,

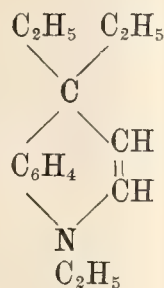
```
    C2H5
    C
  /   \\
C6H4   C CH3
  \   /
    N
    H
```

si formano due basi aventi la composizione data dalle formole

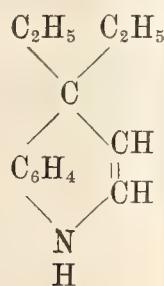
$$C_{15}H_{21}N \quad e \quad C_{13}H_{17}N \ (3).$$

(1) Ciamician, Berl. Ber. 29-2460 e Ciamician e Piccinini, 29-2465.

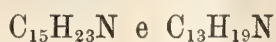
(2) Fischer e Stheche, Ann. Chem. 242-356.

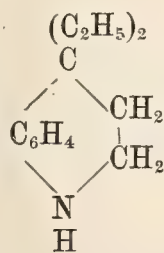
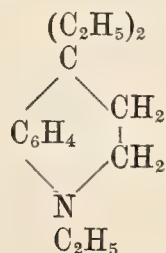
(3) Fischer e Stheche, Ann. Chem. 242-359. Ciamician e Plancher, Gazz. Chim. Ital., 27 a 389.

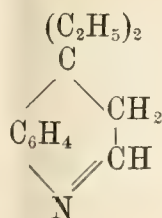
La prima di esse, per l'analogia che presenta colla anzidetta trimetildiidrochinolina colla quale ha una vera identità di comportamento, fu chiamata *trietildiidrochinolina*

```
C2H5  C2H5
   \  /
    C
   / \
      CH
C6H4  ||
      CH
   \ /
    N
    C2H5
```

Questa base sta in relazione strettissima colla seconda dalla quale si può facilmente ottenere per l'azione del ioduro di etile, e parve giustificato per questo attribuire all'alcaloide $C_{13}H_{17}N$ la costituzione di base secondaria e chiamarla *dietildiidrochinolina*

```
C2H5  C2H5
   \  /
    C
   / \
      CH
C6H4  ||
      CH
   \ /
    N
    H
```

Queste relazioni erano confermate anche dal fatto che le basi

$$C_{15}H_{23}N \text{ e } C_{13}H_{19}N$$

che si ottengono rispettivamente riducendo la trietil- e la dietildiidrochinolina hanno realmente tutti i caratteri di base terziaria l'una, e di base secondaria l'altra, come risulta dalle formole

```
  (C2H5)2              (C2H5)2
    C                    C
   / \                  / \
      CH2                  CH2
C6H4  |              C6H4  |
      CH2                  CH2
   \ /                  \ /
    N                    N
    C2H5                 H
```

Tuttavia alcune delle reazioni della dietildiidrochinolina non stavano in perfetto accordo con queste idee, e per esse ritenni che le si potesse attribuire la formola

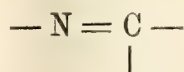
$$\begin{array}{c} (C_2H_5)_2 \\ C \\ \diagup \quad \diagdown CH_2 \\ C_6H_4 \qquad | \\ \quad\quad CH \\ \diagdown \quad /\!\!/ \\ N \end{array}$$

tantomera della prima.

I fatti ai quali alludo sono i seguenti:

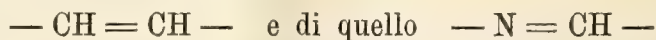
Essa dà un nitrosoderivato che a differenza delle nitrosoammine, non dà la nota reazione di Liebermann; e col fenilisocianato reagisce solo ad alta temperatura [1], mentre è noto che questo reattivo si presta assai bene anche a temperature relativamente basse per rivelare l' idrogeno imminico. Assai notevole è pure il fatto che essa al contrario della trietildiidrochinolina è stabile al permanganato a freddo.

Bisognò dunque che ammettessi che il doppio legame intercorresse tra il carbonio e l' azoto.

Sul modo di comportarsi dell' aggruppamento

$$\begin{array}{c} -N=C- \\ \quad\ | \end{array}$$

col permanganato non si hanno molte notizie; tuttavia è noto che le ossime, le quali indubbiamente contengono tale concatenazione di atomi, non salificate in soluzione alcoolica resistono all' azione di questo reattivo [2]. Trovai perciò molto acconcio vedere come agiscono in tal caso i derivati aldeidici delle ammine, ed ho riscontrato che la benzilidenanilina in soluzione alcoolica resiste lungamente al permanganato.

La diversa funzione del legame

$$-CH=CH- \quad \text{e di quello} \quad -N=CH-$$

vien posta bene in rilievo se si fa questo raffronto veramente tipico.

Lo *stilbene* $C_6H_5-CH=CH-C_6H_5$ decolora all' istante il permanganato.

La *benzilidenanilina* $C_6H_5-N=CH-C_6H_5$ no.

Fu così stabilito che nella base in questione il doppio legame doveva trovarsi tra l' azoto ed il carbonio.

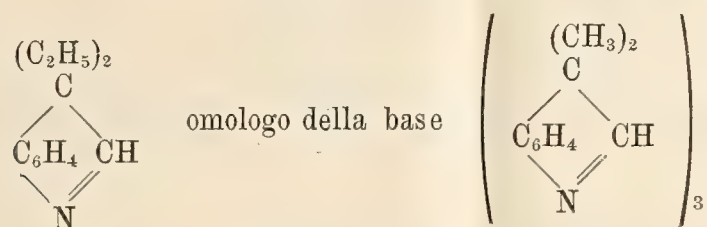
(1) Gazz. Chim. Ital. 27 a 400.
(2) Angeli, Gazz. Chim. Ital. 27 *b*-365.

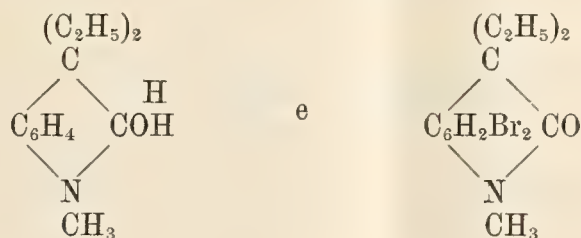
Però l'ossidazione a caldo con permanganato, venne a modificare ulteriormente le mie idee sulla costituzione di questo alcaloide e a farmi dubitare della sua natura chinolinica, rendendo probabile che esso come tutte le cosidette diidrochinoline dovesse considerarsi come un composto a nucleo indolico.

L'acido che si ottiene ha la formola $C_{13}H_{15}NO_2$.

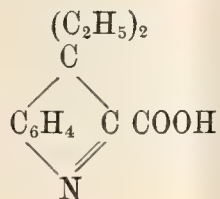
Già confrontando la formola della base $C_{13}H_{17}N$ con quello dell'acido che ne deriva, si vede che è avvenutó nella composizione del corpo lo stesso mutamento che avviene tutte le volte che in un derivato un metile viene ossidato a carbossile.

Quest' acido scaldato elimina anidride carbonica e si trasforma in un alcaloide

$$\begin{array}{c} (C_2H_5)_2 \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \\ C_6H_4 \quad CH \\ \diagdown \quad /\!/ \\ N \end{array} \quad \text{omologo della base} \quad \left(\begin{array}{c} (CH_3)_2 \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \\ C_6H_4 \quad CH \\ \diagdown \quad /\!/ \\ N \end{array} \right)_3$$

ottenuta da Brunner ([1]). Facendo agire sul suo iodometilato la potassa, e quindi l'acqua di bromo si passa successivamente ad un *dietilmetilindolinolo* e quindi ad un *dietilmetilbibromoindolinone*

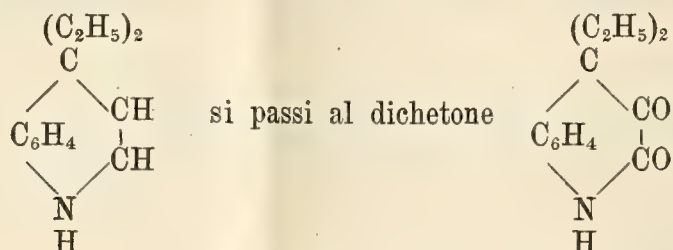
$$\begin{array}{c} (C_2H_5)_2 \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \quad H \\ C_6H_4 \quad COH \\ \diagdown \quad \diagup \\ N \\ CH_3 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} (C_2H_5)_2 \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \\ C_6H_2Br_2 \quad CO \\ \diagdown \quad \diagup \\ N \\ CH_3 \end{array}$$

le proprietà dei quali hanno un perfetto riscontro in quelle degli omologhi ottenuti da Brunner ([2]).

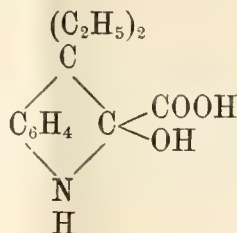
All'acido $C_{13}H_{15}NO_2$ spetta quindi la formola

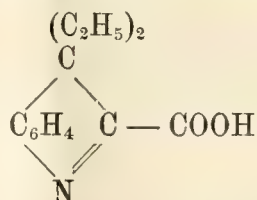
$$\begin{array}{c} (C_2H_5)_2 \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \\ C_6H_4 \quad C\ COOH \\ \diagdown \quad /\!/ \\ N \end{array}$$

([1]) Brunner, Monath. für Chem. 16-851 e 17-254.

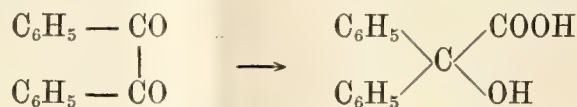
([2]) Monath. für Chem. 27-253, Piccinini, Gazz. Chim. 27 a 473.

Volendo spiegare il passaggio da una diidrochinolina ad un acido di questa costituzione si incontrano serie difficoltà. Si potrebbe invero ammettere che dapprima dalla base

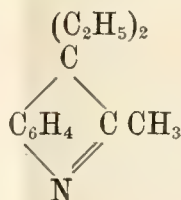
$$\begin{array}{ccc} & (C_2H_5)_2 & \\ & C & \\ / & & \backslash CH \\ C_6H_4 & & | \\ \backslash & & /CH \\ & N & \\ & H & \end{array} \quad \text{si passi al dichetone} \quad \begin{array}{ccc} & (C_2H_5)_2 & \\ & C & \\ / & & \backslash CO \\ C_6H_4 & & | \\ \backslash & & /CO \\ & N & \\ & H & \end{array}$$

e da questo all' ossiacido

$$\begin{array}{ccc} & (C_2H_5)_2 & \\ & C & \\ / & & \backslash \\ C_6H_4 & & C{<}^{COOH}_{OH} \\ \backslash & & / \\ & N & \\ & H & \end{array}$$

e finalmente per eliminazione di acqua all' acido

$$\begin{array}{ccc} & (C_2H_5)_2 & \\ & C & \\ / & & \backslash \\ C_6H_4 & & C - COOH \\ \backslash & & // \\ & N & \end{array}$$

Un passaggio di tal genere non sarebbe infine del tutto senza esempî, giacchè è noto che per azione della potassa il benzile dà acido benzilico [1]

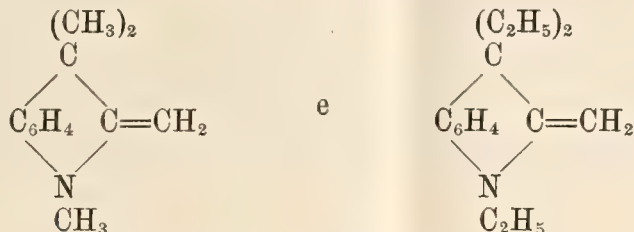
$$\begin{array}{c} C_6H_5 - CO \\ | \\ C_6H_5 - CO \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C_6H_5 \\ C_6H_5 \end{array}{>}C{<}\begin{array}{c} COOH \\ OH \end{array}$$

Tuttavia questa spiegazione appare però alquanto artificiosa e non del tutto soddisfacente.

Fui perciò indotto ad attribuire alla base $C_{13}H_{17}N$ la formola

$$\begin{array}{ccc} & (C_2H_5)_2 & \\ & C & \\ / & & \backslash \\ C_6H_4 & & C\,CH_3 \\ \backslash & & // \\ & N & \end{array}$$

che della succitata trasformazione rende conto nel modo più chiaro.

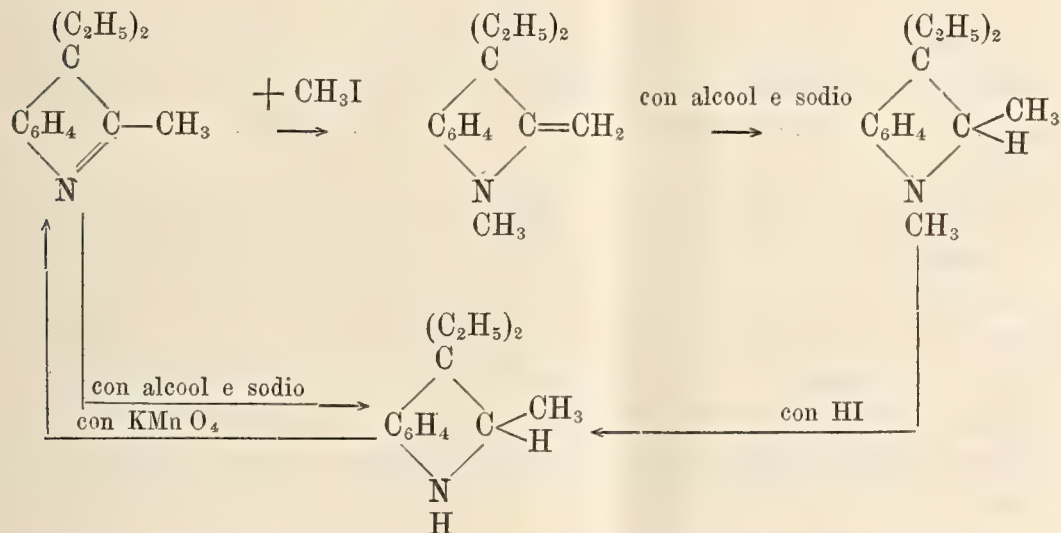
[1] Klinger, Berl. Ber. 19, 1863.

Per le basi $C_{14}H_{19}N$ [1] e $C_{15}H_{21}N$ [2] che si ottengono dalla precedente con ioduro di metile e di etile volendosi escludere la formola chinolinica si presentano come probabili le seguenti:

$$
\begin{array}{c}
(CH_3)_2 \\
C \\
/ \quad \backslash \\
C_6H_4 \quad C{=}CH_2 \\
\backslash \quad / \\
N \\
CH_3
\end{array}
\qquad e \qquad
\begin{array}{c}
(C_2H_5)_2 \\
C \\
/ \quad \backslash \\
C_6H_4 \quad C{=}CH_2 \\
\backslash \quad / \\
N \\
C_2H_5
\end{array}
$$

A tale formola si possono fare obbiezioni che più avanti verranno esposte. Tuttavia essa è resa probabile dal fatto che non può ammettersi per queste basi una struttura differente da quella dell' alcaloide dal quale provengono.

Ciò risulta dal seguente circolo di trasformazioni da me recentemente realizzato:

$$
\begin{array}{c}
(C_2H_5)_2 \\
C \\
/ \quad \backslash \\
C_6H_4 \quad C{-}CH_3 \\
\backslash \quad /\!/ \\
N
\end{array}
\xrightarrow{+\,CH_3I}
\begin{array}{c}
(C_2H_5)_2 \\
C \\
/ \quad \backslash \\
C_6H_4 \quad C{=}CH_2 \\
\backslash \quad / \\
N \\
CH_3
\end{array}
\xrightarrow{\text{con alcool e sodio}}
\begin{array}{c}
(C_2H_5)_2 \\
C \\
/ \quad \backslash \\
C_6H_4 \quad C{<}^{CH_3}_{H} \\
\backslash \quad / \\
N \\
CH_3
\end{array}
$$

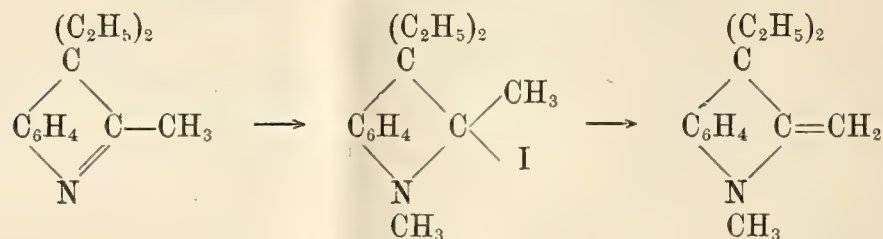
$$
\xrightarrow[\text{con KMn O}_4\ (\uparrow)]{\text{con alcool e sodio}}
\begin{array}{c}
(C_2H_5)_2 \\
C \\
/ \quad \backslash \\
C_6H_4 \quad C{<}^{CH_3}_{H} \\
\backslash \quad / \\
N \\
H
\end{array}
\xleftarrow{\text{con HI}}
$$

giacchè sarebbe assurdo ammettere che in queste reazioni per le quali si arriva ad uno stesso prodotto e si può tornare a quello di partenza, uno qualunque dei prodotti intermedî avesse costituzione essenzialmente differente dagli altri come importerebbe l' ammettere per le due basi suddette la struttura chinolinica, accettando l' indolica per quella $C_{13}H_{17}N$.

Se tale è dunque la loro costituzione, l'azione del ioduro alcoolico per la quale si originano dall' alcaloide $C_{13}H_{17}N$, si può spiegare nel modo seguente:

(1) Ann. Chem., 242, 361.

(2) Gazz. Chim. Ital., 37 a 403

Il ioduro alcoolico viene prima addizionato ed il prodotto d'addizione trattato con potassa, invece di dare il corrispondente ossiderivato, elimina una molecola d'acqua a spese di un atomo d'idrogeno del metile formando un doppio legame nella catena laterale:

$$
\begin{array}{c}
(C_2H_5)_2 \\
C \\
\diagup \quad \diagdown \\
C_6H_4 \quad C{-}CH_3 \\
\diagdown \quad /\!\!/ \\
N
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c}
(C_2H_5)_2 \\
C \\
\diagup \quad \diagdown \\
C_6H_4 \quad C \begin{array}{l} \diagup CH_3 \\ \diagdown I \end{array} \\
\diagdown \quad \diagup \\
N \\
CH_3
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c}
(C_2H_5)_2 \\
C \\
\diagup \quad \diagdown \\
C_6H_4 \quad C{=}CH_2 \\
\diagdown \quad \diagup \\
N \\
CH_3
\end{array}
$$

Istologia vegetale. — *Esiste cromatolisi nei nuclei normali vegetali?.* Nota del dott. B. Longo, presentata dal Corrispondente R. Pirotta [1].

Secondo il prof. dott. F. Cavara [2] nei nuclei vegetali si avrebbe normalmente e costantemente il fenomeno della *cromatolisi* [3], la quale quindi non sarebbe « più da relegarsi fra i fenomeni di deviazione e fra i casi patologici ».

Secondo il Cavara, cioè, la cromatina nei nuclei in riposo si andrebbe a raccogliere intorno al nucleolo, il quale quindi non sarebbe costituito, come si è ammesso finora, di un'unica sostanza, ma invece « di due sostanze, l'una interna che forma la massa maggiore, omogenea, di speciale rifrangenza, poco colorabile, la quale corrisponde alla *plastina* di Zacharias o *pirenina* di Frank Schwarz; l'altra periferica, e come addossata alla precedente, con spessore variabile, talora molto esiguo, e molto più colorabile, con caratteri che la fanno rapportare alla cromatina o ad una modificazione di questa ».

Di più, secondo il Cavara, non si dovrebbe parlare di struttura vacuolare dei nucleoli, ma invece di struttura alveolare, cioè con cavità comuni-

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

[2] Cavara F., *Contributo alla morfologia ed allo sviluppo degl'idioblasti delle Camelliee.* Atti Istit. Bot. di Pavia, serie 2^a, vol. IV (1895). — Id., *Ipertrofie ed anomalie nucleari in seguito a parassitismo vegetale.* Rivista di Patol. veget. tomo V (1896). — Id., *Intorno ad alcune strutture nucleari.* Atti Ist. Bot. di Pavia. Ser. 2^a, vol. V (1897).

[3] Col nome di *cromatolisi, picnosi* ecc. si designano in Istologia animale diverse forme di degenerazione nucleare, talune delle quali sono caratterizzate più specialmente dall'impicciolimento del nucleo, dalla condensazione della cromatina in una massa omogenea fortemente colorabile coi reattivi, la quale può anche scindersi in più frammenti. Il processo può colpire tanto i nuclei in riposo che quelli in cariocinesi.

canti all' esterno; cavità, che per giunta si troverebbero localizzate esclusivamente nel rivestimento di cromatina.

Riguardo poi alla funzione « i nucleoli (sempre secondo il modo di vedere del Cavara) sono dei corpi condensatori di materiali di nutrizione nel nucleo, e cioè di plastina che viene adibita alla formazione di alcune parti (fibre del fuso, ispessimenti della membrana divisionale), e di cromatina o di una sua chimica modificazione, la quale viene sottratta per la costituzione e nutrizione dei cromosomi, o, nel caso di cellule non più suscettibili di divisione, adibita alla nutrizione generale dell' elemento istologico ».

Io, studiando gl' idioblasti muciferi delle Opunzie [1], non avevo mai rinvenuto nei nuclei di quelle cellule il fenomeno della *cromatolisi* nel senso voluto dal Cavara; anzi avevo osservato che quei nuclei concordavano perfettamente, salvo la grandezza, coi nuclei delle cellule circostanti.

Pure esponendo i miei risultati, non feci allora punto cenno della questione della *cromatolisi* sollevata dal Cavara, sia perchè non entrava nell' ordine delle ricerche che mi ero proposto, sia perchè non avevo avuto agio di fare delle osservazioni sulle Camelliee ove il Cavara diceva allora di averla solamente trovata.

Però ultimamente il Cavara [2] avendo apportato nuovo e più ampio contributo al fenomeno della *cromatolisi*, nel senso che egli l' avrebbe trovato esteso a tutti i nuclei normali da lui studiati, così mi sono invogliato di approfondire anch' io delle ricerche in proposito anche perchè, studiando l' origine dei granelli pollinici delle *Calycanthaceae*, avevo trovato, durante le due divisioni successive delle cellule madri definitive del polline, costantemente dei nucleoli nel citoplasma, i quali quindi non potevano certamente essere adibiti, almeno in quel caso, alla nutrizione dei cromosomi.

E perciò eccomi ad esporre brevemente ma francamente i risultati delle mie ricerche che, gioverà dirlo, ho condotte con tutta la cura possibile e senza idee preconcette.

In tutte le numerosissime osservazioni fatte io ho sempre trovati i nucleoli normali, ossia non presentanti la condensazione o compenetrazione delle due sostanze (*plastina* o *pirenina* all' interno e *cromatina* all' esterno) come pretenderebbe il Cavara.

E posso asserire che ho fatti dei preparati che riguardo alla differenziazione delle colorazioni, specialmente col metodo così squisito della doppia

(1) Longo B., *Contributo allo studio degl' idioblasti muciferi delle Cactee.* Annuario del R. Istit. Bot. di Roma, vol. VII (marzo 1897).

(2) Cavara F., *Intorno ad alcune strutture nucleari.* Atti Istit. Bot. di Pavia, ser. 2ª, vol. V (dicembre 1897).

colorazione dello Zimmermann (verde di jodio e fucsina) [1], non lasciavano proprio nulla a desiderare.

Ho sempre, cioè, trovato che la sostanza del nucleolo si coloriva *tutta* in rosso col metodo dello Zimmermann; nè ho mai avuto neppure un caso in cui la parte centrale del nucleolo si fosse colorata in rosso e la parte periferica in verde o tinta affine.

Di più ho osservato che nei casi in cui il nucleolo non è omogeneo, ossia che presenta delle cavità, queste non sono comunicanti all' esterno, ma si trovano invece situate nell'interno della massa del nucleolo stesso; in altre parole dette cavità non sono *alveoli*, ma *vacuoli*. Inoltre tali vacuoli sono distribuiti nella massa del nucleolo senza alcun ordine, potendosi trovare uno o più vacuoli piccoli, oppure solamente un vacuolo grande centrale, oppure un vacuolo grande centrale e tanti altri più piccoli periferici. Insomma la struttura del nucleolo può variare da una massa perfettamente omogenea ad una nettamente schiumosa.

E per risolvere queste fini strutture del nucleolo, ho fatto uso naturalmente non di obbiettivi a secco, come il Cavara, ma di obbiettivi ad immersione ($^1/_{15}''$ semiapocromatico di Koristka) e di oculari compensatori. — Ora, mettendo a foco l' obbiettivo proprio sulla superficie di un nucleolo intatto, si vede chiaramente che il contorno è continuo, ossia che la sua superficie (che può talora corrispondere ad una membranella esilissima) non presenta nessuna soluzione di continuità. Mentre si è poi soltanto quando si abbassa il tubo del microscopio che compariscono le cavità in questione; cavità, che scompariscono di nuovo quando, continuando ad abbassare il tubo del microscopio, si viene a mettere a foco l' obbiettivo sulla superficie inferiore del nucleolo.

Debbo anche aggiungere che quella parte del nucleolo che il Cavara vorrebbe che fosse una sostanza « corrispondente alla *plastina* di Zacharias od alla *pirenina* di Frank Schwarz » non è altro invece che un vacuolo.

Ed io mi sono convinto di ciò, sia con la osservazione su nucleoli illesi, sia specialmente su qualche grosso nucleolo sezionato, nei quali casi, tanto con colorazioni monocromatiche, quanto con doppie colorazioni, detta parte restava sempre scolorata.

Ora se questa parte fosse costituita dalla sostanza nucleolare propriamente detta, come pretenderebbe il Cavara, allora essa si dovrebbe colorire come i nucleoli. Invece il Cavara stesso ammette che *non si colora*, oppure si colora debolmente.

Questo colorarsi debolmente è una mera illusione ottica. Infatti quando noi abbiamo un nucleolo illeso con uno o più vacuoli ed abbiamo colorato

[1] Zimmermann A., *Die Morphologie und Physiologie des pflanzlichen Zellkernes.* Jena, 1896, pag. 6.

il nucleolo, è naturale che si abbia l'illusione come se quella parte del nucleolo corrispondente ai vacuoli fosse anche colorata, perchè i raggi luminosi prima di arrivare ai vacuoli devono attraversare la sostanza nucleare *colorata* che limita i vacuoli stessi.

Un fatto poi veramente decisivo che mi ha tolto ogni dubbio in proposito, è che talora in qualche preparato io ho osservato che quella parte in questione era occupata dall' aria.

E mi affretto a dire che ho fatte queste osservazioni non solo su piante e parti di piante diversissime, ma anche su alcune stesse piante, anzi su alcuni stessi elementi istologici studiati dal Cavara, sciegliendo appunto quelli che egli darebbe per più dimostrativi.

Secondo il Cavara, infatti, il nucleo degl'idioblasti delle *Camelliee* sarebbe privo di membrana; di più conterrebbe un globulo centrale, che non corrisponderebbe al comune nucleolo dei nuclei in riposo, ma che sarebbe invece costituito di cromatina nella quale si troverebbero immersi dei corpuscoli assai minuti (i veri nucleoli). — Però il Cavara stesso afferma che le reazioni dello Schwarz (cloruro di sodio, ferrocianuro di potassio, solfato di rame ecc., che lo Schwarz dà per solventi della cromatina) (¹) intaccarono appena detto corpo centrale.

Ora io, avendo fatte accurate ricerche in proposito, posso senz' altro affermare che i grossi nuclei degl'idioblasti delle *Camelliee* in via di sviluppo non differiscono, salvo la grandezza, dai nuclei delle altre cellule circostanti (²); che questi nuclei sono forniti di membrana; che il corpo centrale non è costituito di cromatina ma corrisponde perfettamente ai nucleoli delle altre cellule; e che i « corpuscoli assai minuti » che stanno immersi nel detto corpo centrale non sono altro che vacuoli (³).

Il Cavara afferma anche che i grossi nuclei degli elementi vasali e dei tubi cribrosi delle *Cucurbita* conterrebbero un grosso nucleolo (con talora qualche altro frammento più piccolo), risultante costituito da una parte centrale omogenea (nncleolo propriamente detto) e da una parte periferica di rivestimento, la quale sarebbe distintamente alveolata e costituita alla sua volta di cromatina. Questa si colorerebbe infatti in bleu, come i globuli che

(¹) Schwarz F., *Die morphologische und chemische Zusammensetzung des Protoplasma.* Cohn's Beiträge zur Biologie der Pflanzen. Bd. V, 1892.

(²) A proposito di altri idioblasti posso affermare che gli stessi risultati io ottenevo, oltre che nei ricordati idioblasti muciferi delle Opunzie, anche negl'idioblasti oleiferi delle *Calycanthaceae.*

(³) Anche lo Zimmermann, controllando le osservazioni del Cavara, aveva trovati questi nuclei perfettamente normali (Zimmermann A., op. cit., pag. 35). Ma certamente ciò ha dovuto sfuggire al Cavara giacchè egli non ne fa punto cenno.

si trovano sparsi nel reticolo, con la miscela dello Zimmermann (verde di jodio e fucsina).

Io invece posso affermare che tutta la massa del grosso nucleolo (come anche dei minori quando ci sono) proprio con la suddetta miscela dello Zimmermann si colora esclusivamente in rosso, mentre sono solamente i grossi granuli di cromatina (corrispondenti ai *nucleoli accessori* « Nebennucleolen » o *pseudonucleoli* di Peters (1) e di Rosen) (2) che si colorano in verde o bleu. Di più nei casi in cui il nucleolo contiene delle cavità, queste non sono altro che dei veri vacuoli (3).

Di più il Cavara afferma che « nei nuclei delle *Cucurbita* ecc. tutta o quasi la cromatina dell' impalcatura venga ad addossarsi al nucleolo ».

Ed io invece posso anche qui asserire che ciò non è affatto conforme al vero, in quanto che la cromatina non solo non si è andata ad addossare al nucleolo, ma si trova proprio nell' impalcatura nucleare di linina raccolta in granuli molto grossi.

E veramente io non so comprendere come mai il Cavara possa parlare di mancanza di cromatina nell' impalcatura del nucleo, mentre egli stesso afferma che appunto con la doppia colorazione dello Zimmermann i grossi granuli in parola si colorano in bleu.

Ma il caso veramente più dimostrativo, secondo il Cavara, si osserverebbe nel nucleo secondario del sacco embrionale dell' *Ornithogalum umbellatum.* Tale nucleo contiene un nucleolo di notevoli dimensioni, il quale risulterebbe costituito, come al solito secondo il Cavara, da una gran massa centrale (il vero nucleolo) e da una parte periferica di rivestimento (cromatina), colorantesi questa ultima in bleu con la solita miscela dello Zimmermann. Di più questo rivestimento di cromatina sarebbe distintamente a struttura *alveolato-reticolata.*

Io invece anche qui posso asserire che con l' istesso metodo della doppia colorazione dello Zimmermann, tutta la massa del nucleolo (o dei due nucleoli quando ancora non si sono fusi) si colora in rosso; di più la struttura del nucleolo è anche qui *vacuolare.* — Ed io per giunta ho dei preparati in cui si vede che l' aria occupa sia i piccoli vacuoli periferici, sia il grande vacuolo centrale, il quale quindi va da sè che non può essere una sostanza (molto meno *plastina* o *pirenina* come pretenderebbe il Cavara), ma un va-

(1) Peters Th., *Untersuchungen über den Zellkern in den Samen, während ihrer Entwicklung, Ruhe und Keimung.* Phil. Inaug.-Diss. Rostok, 1891.

(2) Rosen F., *Beiträge zur Kenntniss der Pflanzenzelle.* Cohn's Beiträge zur Biologie der Pflanzen. Bd. V, 1892.

(3) Aggiungo a proposito dei nuclei dei vasi e dei tubi cribrosi delle *Cucurbita* che queste mie osservazioni non fanno che confermare quanto era stato osservato e bene dal Zacharias (Zacharias E., *Ueber das Verhalten des Zellkerns in wachsenden Zellen.* Flora, 1895, Ergäuzungb. Bd. 81.).

cuolo centrale molto più grande degli altri circostanti, scavato come gli altri nell'interno della massa del nucleolo stesso ([1]).

Ma il Cavara non si limita alle sue osservazioni. Egli scrive: « Struttura nucleolare del tutto analoga a quella descritta pei nuclei dell' *Ornithogalum umbellatum* è stata riscontrata dallo Swingle ([2]) pei nucleoli delle *Sphacelariacee*, senza, per altro, che questo autore ne dia alcuna ragione. Egli disegna nella fig. 11, tav. XV e fig. 13 e 14, tav. XVI della sua Memoria, nucleoli a struttura alveolata con alone più scuro periferico, nel quale ci sono dei piccoli vani ed internamente una massa omogenea, ma lo Swingle dà per questi nucleoli la solita interpretazione: « Zur Beginn dieser Veränderungen in dem Chromatingerüst ist das Kernkörperchen beinähe homogenen, wird aber allmählich mehr und mehr vacuolisirt und scheint an volumen zuzunehmen ». Resta a domandare, allora, per quale ragione egli abbia disegnato più scuro l'alone che circuisce il nucleolo, e che corrisponde a quello da me disegnato pei nucleoli di *Ornithogalum umbellatum* (fig. 17, 18, tav. VIII), se non si tratta di una differenziazione esterna del nucleolo » ([3]).

Or bene io posso, anzi debbo affermare invece, che quanto descrive e disegna lo Swingle è perfettamente conforme al vero; che lo Swingle non disegna nè descrive nucleoli a struttura *alveolata* come pretenderebbe il Cavara, ma nucleoli a struttura *vacuolare* come lo Swingle stesso chiaramente dice. — Quando noi abbiamo un nucleolo sferico con un grande vacuolo centrale e con dei piccoli vacuoli periferici (e qui è proprio il caso), la sua immagine all'osservazione microscopica (sia in sezione del nucleolo operata dalla lama del rasoio, sia in sezione ottica di un nucleolo integro) è perfettamente un anello od un alone che dir si voglia, il quale anello od alone alla sua volta presenta naturalmente dei piccoli vani corrispondenti ai piccoli vacuoli periferici, come il grande foro centrale corrisponde al grande vacuolo centrale.

Anche qui si tratta di erronea interpetrazione del Cavara, il quale ritiene sempre come nucleolo un vacuolo.

Noto anche che l'idea della *cromatolisi* nei nuclei normali vegetali è affatto propria del Cavara. Nessun autore, ch'io sappia, ha menomamente condivisa la sua idea.

Già ho rilevato che lo Zimmermann ([4]) è decisamente contrario.

([1]) Credo utile di aggiungere, che v'ha dei casi in cui manca un grande vacuolo centrale, trovandosi invece al suo posto alcuni altri più piccoli.

([2]) Swingle W. T., *Zur Kenntniss der Kern -u. Zelltheilung bei Sphacelariaceen.* Pringsheim's Jahrbücher für wissensch. Botanik., vol. XXX, 1897.

([3]) Cavara F., *Intorno ad alcune strutture nucleari.* Atti Istit. Bot. di Pavia, ser. 2ª, vol. V (1897), pag. 24 dell'estratto.

([4]) Zimmermann A., op. cit., pag. 35.

Il Cavara [1] però, a proposito del suo lavoro sugl' idioblasti delle Camelliee, dice che le sue osservazioni furono « benevolmente interpretate » dal Zacharias e dal Molliard. — Ora a togliere ogni equivoco a tale espressione, io credo non inutile di far rilevare che il Zacharias [2] cita tale lavoro del Cavara incidentalmente e soltanto per ciò che concerne i rapporti tra il volume del nucleo e quello della cellula in via di accrescimento. Mentre poi per quanto concerne la *cromatolisi* egli non solo ne lascia tutta la responsabilità al Cavara, ma fa persino notare che il Cavara stesso afferma che il *globulo centrale* del nucleo « si lascia appena intaccare dai reattivi che lo Schwarz dà per solventi della cromatina ». — Il Molliard [3], poi, che cita anche incidentalmente tale lavoro del Cavara e soltanto per rilevare « l' analogia che corre tra i nuclei di elementi ipertrofici in casi patologici e quelli di cellule che subiscono normalmente un accrescimento considerevole », non fa punto cenno della *cromatolisi* del Cavara.

Il Cavara poi è partigiano convinto dell' ipotesi che tra i nucleoli ed i cromosomi esista uno stretto ed immediato rapporto nel senso che la cromatina, la quale (sempre secondo lui) durante lo stato di riposo del nucleo si è andata ad addossare al nucleolo, durante la cariocinesi invece andrebbe a costituire ed a nutrire i cromosomi.

Or bene (a prescindere, come ho dimostrato, della non esistenza della *cromatolisi* del Cavara nei nuclei normali vegetali), se si volesse ammettere questo immediato rapporto tra i nucleoli ed i cromosomi, come si spiegherebbe allora il fatto dei molti casi osservati nei quali, mentre i cromosomi sono completamente formati, il nucleolo ancora è del tutto inalterato ? [4]

Come si spiegherebbe ancora il fatto degli altri casi osservati nei quali si ha perfino persistenza dei nucleoli (o spezzettature degli stessi) durante le cariocinesi ? — E ciò è un fenomeno tutt' altro che raro, essendo stato osservato non solo nelle cellule madri delle spore e del polline e nei sacchi embrionali, ma anche nelle cellule vegetative sia di piante superiori come di piante inferiori [5].

[1] Cavara F,. *Intorno ad alcune strutture nucleari.* Atti Istit. Bot. di Pavia, ser. 2ª, vol. V, 1897, pag. 14 dell' estratto.

[2] Zacharias E., op. cit., pag. 226-227.

[3] Molliard M., *Hypertrophie pathologique des cellules végétales.* Rev. génér. de Bot., t. IX, 1897.

[4] È da notare anche che, nei casi in cui è stato osservato che i cromosomi durante la cariocinesi diventano eritrofili, questo cambiamento di colorazione sovente si verifica prima ancora della dissoluzione dei nucleoli.

[5] Tangl E., *Die Kern- und Zellteilungen bei der Bildung des Pollens von Hemerocallis fulva* L. Denkschr. d. mathem.-naturwiss. Klasse d. Akad. d. Wiss. zu Wien. Bd. 45, 1882; Strasburger E., *Ueber den Teilungsvorgang der Zellkerne und das Ver-*

Nè mi sembra giusta l'obbiezione mossa, che cioè questi nucleoli, che si trovano sparsi nel citoplasma durante la cariocinesi, non sarebbero che dei prodotti di coagulazione del liquido fissatore sulla sostanza nucleolare disciolta. — Ed affermo questo perchè io ho fatto uso di diversi liquidi fissatori, e sempre nelle due divisioni cariocinetiche successive delle cellule madri difinitive del polline delle *Calycanthaceae* li ho trovati costanti. — E poi, ammesso pure che siano dovuti alla sostanza nucleolare disciolta ed in seguito coagulata, ciò al certo non prova che la sostanza nucleolare sia andata a formare ed a nutrire i cromosomi.

Io con ciò però non voglio, anzi non posso, assolutamente negare la possibilità di un rapporto tra i nucleoli ed i cromosomi. Affermo solamente questo che i fatti osservati (e nei fatti sta il vero fondamento della scienza) non ci dicono per ora con certezza nulla che possa avvalorare questa ipotesi (come del resto tutte le altre ipotesi emesse circa la funzione dei nucleoli), anzi taluni fatti, come ho rilevato, sono decisamente contrari.

Quindi, riassumendo ora infine quanto ho esposto innanzi, non mi resta che conchiudere che:

1°. Il fenomeno della *cromatolisi*, come pretenderebbe il Cavara, non esiste nei nuclei normali vegetali.

---

hältniss der Kernteilung zur Zellteilung. Bonn, 1882; Id., *Die Kontroversen der indirekten Kernteilung.* Bonn, 1884; Farmer J. B., *On nuclear division in the Pollen-mother-cells of Lilium Martagon.* Annals of Botany. Vol. 7, 1893; Zimmermann A., *Ueber das Verhalten der Nukleolen vährend der Karyokinese.* Beiträge zur Morphologie und Physiologie der Pflanzenzelle. Bd. II, Tübingen, 1893; Karsten G., *Ueber Beziehungen der Nukleolen zu den Centrosomen bei Psilotum triquetrum.* Berichte d. deutsch. botan. Gesellschaft, Bd. 11, 1893; Guignard L., *Sur l'origine des sphères directrices.* Journal de Botanique. T. 8, 1894; Belajeff W., *Zur Kenntniss der Karyokinese bei den Pflanzen.* Flora, Ergbd. 1894; Strasburger E., *Karyokinetische Probleme.* Pringsheim's Jahrb. für wissensch. Botanik. Bd. 28, 1895; Hirase S., *Études sur la fécondation et l'embryogénie du Ginkgo biloba.* Journ. of the College of sc., I. Univ. Tokyo. Vol. 8, 1895, sec. Zimm.; Rosen F., *Beiträge zur Kenntniss der Pflanzenzellen. III. Kerne und Kernkörperchen in meristematischen und sporogenen Geweben.* Cohn's Beiträge zur Biologie der Pflanzen. Bd. VII, 1895; Sargant E., *The formation of the sexual nuclei in Lilium Martagon. II. Spermatogenesis.* Annals of Botany. Vol. XI, 1897; Mottier D. M., *Beiträge zur Kenntniss der Kerntheilung in den Pollenmutterzellen einiger Dikotylen und Monokotylen.* Pringsheim's Jahrbücher für wissensch. Botanik. Vol. 30, 1897; Debski B., *Beobachtungen über Kerntheilung bei Chara fragilis.* Pringsheim's Jahrbücher für wissensch. Botanik. Vol. 30, 1897; Mottier D. M., *Ueber das Verhalten der Kerne bei der Entwickelung des Embryosacks und die Vorgänge bei der Befruchtung.* Pringsheim's Jahrbücher für wiss. Botanik. Vol. 31, Heft I (1897). Coulter J. M., *Contribution to the life- history of Ranunculus.* Botanical Gazette. Vol. XXV, n. 2, 1898.

2°. I nucleoli sono costituiti di un' unica sostanza, e non di una centrale (*plastina* di Zacharias o *pirenina* di F. Schwarz) rappresentante, secondo il Cavara, il nucleolo propriamente detto e di una periferica rappresentante la cromatina.

3°. Il nucleolo propriamente detto del Cavara non è altro che un vacuolo.

4°. I nucleoli sono o perfettamente omogenei, oppure *vacuolati* ma non *alveolati*.

5°. Nello stato attuale della scienza ignoriamo la vera funzione dei nucleoli.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell' 11 giugno 1898.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Le ombre dei raggi X studiate con la fotografia.* Nota del Socio Emilio Villari [1].

Per determinare la direzione dei raggi X e le ombre da essi portate si potrebbe, forse, fare uso della fosforescenza, che destano in alcune sostanze; od, anche meglio, della loro virtù fotografica; ma non si potrebbe adoperare l' elettroscopio, perchè questo viene scaricato dall' aria attraversata ed attivata dai raggi, la quale si diffonde poi tutto all' intorno [2].

Le ricerche delle quali ora do conto furono eseguite con la fotografia. Intercettai le radiazioni di un grande focus sferico con un disco di piombo ($13 \times 0,5$ cm.) posto a 50 cm. di distanza, e ne raccolsi l' ombra, a 4, 5 cm., su di una lastra Lumière ben chiusa in una scatola di cartone nero. A meglio apprezzare le differenze di tono delle varie parti della fotografia, posi sulla faccia sensibile della lastra una croce di piombo, con braccia grosse 3 mm. e larghe 20 mm.

(1) Presentata nella seduta del 1° maggio 1898.

(2) Villari, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 15 luglio 1896.

Fatto agire il focus per 40 a 50 minuti primi ottenni, con le note operazioni, una positiva, riprodotta ad $\frac{1}{4}$ del vero nella fig. 1, e lievemente esagerata nelle tinte, per renderle più evidenti.

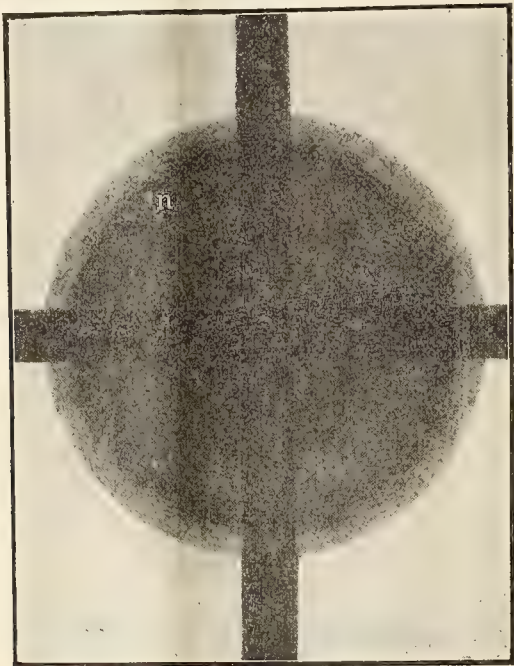



Fig. 1.

In essa si vede un' ombra circolare del disco, assai oscura, terminata da una zona larga da 5 ad 8 mm., sensibilmente più chiara, che finisce all'esterno a taglio netto e bruscamente, mentre nell' interno rapidamente s' oscura fino a confondersi con la tinta più nera dell' ombra. Per questo modo brusco di terminarsi della zona chiara all' esterno e per trovarsi come nell' interno dell' ombra, io, altravolta, l' attribuii ad una specie di flessione degli X, meglio che ad una vera penombra [1]. Alcune volte, internamente alla zona chiara, se ne scorge una più oscura della tinta generale della figura ed a contorni irregolari ed incerti come, alla meglio, è indicato nella figura. In questa vedesi, inoltre, risaltare in oscuro, e meglio alla periferia che al centro, l' ombra della croce di piombo; la quale spicca sui quattro settori, forse più chiari alla periferia che al centro. Questa tinta chiara dei settori non può dipendere dalla trasparenza del disco perchè questo è più grosso della croce, la quale risultò affatto opaca. Nè può dipendere da una specie di fluorescenza che, secondo alcuni autori, destata sul fondo della scatola nelle regioni direttamente colpite dagli X, si diffonderebbe all' intorno sulla lastra. Difatti se cotesta diffusione vi fosse dalla regione r, per es., al vicino settore n se ne dovrebbe verificare una più energica di r ed s, sotto l' estremo b della

[1] Villari, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 6 giugno 1896.

croce, che dovrebbe, per conseguenza, riuscire più chiaro e non già più oscuro dei settori. Lo che non verificandosi, sembra probabile, che le radiazioni Röntgen si pieghino o flettano dietro il disco, rischiarandone in parte l'ombra, la quale pare s' oscuri dalla periferia al centro.

Queste fotografie ottenni prima con un piccolo *focus* di forma ellissoidale. Di poi adoperai un *focus* grande di forma sferica, ed ottenni delle figure del tutto identiche alle precedenti; così che può dirsi, che esse non dipendono dalla forma o dimensione del tubo adoperato, ma dalla natura di esso.

Per confermare questa supposta flessione dei raggi e determinarne possibilmente l' estensione, situai l' apparecchio, indicato schematicamente dalla fig. 2, nel mezzo del mio laboratorio, e lontano 2 a 3 m. da ogni corpo solido. In C è indicato un grande *focus* sferico, che trovasi a circa 40 cm. da una lastra Lumière l, chiusa in una scatola di cartone nero, posta dentro una cassetta di piombo p (26×10×4,5 cm.) a grosse pareti. Al solito, per meglio apprezzare le differenze di toni della fotografia, situai per lungo e nel mezzo della faccia sensibile della lastra una striscia di piombo grossa 3 mm. e larga 20 mm. In altri casi situai l' apparecchio orizzontalmente sopra un tavolo ed in prossimità di una parete del laboratorio, e lo coprii di grosso drappo nero per accrescere le supposte o possibili riflessioni degli X su corpi solidi. Le esperienze vennero fatte attivando il tubo per 40 a 90′ primi. Sviluppate le lastre, s' ottennero delle figure affatto identiche nei due casi e per nulla influenzate dall' essere l' apparecchio vicino o lontano da corpi solidi, i quali perciò, sembra, non abbiano azione sensibile in queste esperienze.

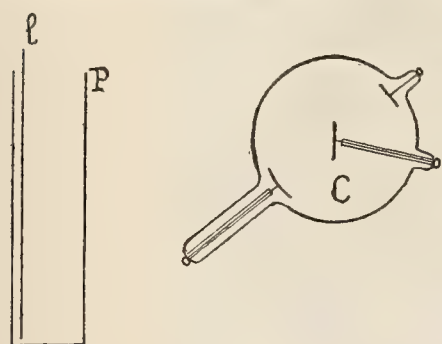



Fig. 2.

Le fotografie positive ricavate con questo procedimento sono simili alle precedenti ottenute col disco. Esse mostrano la solita zona di 5 o più mm., semiluminosa o di penombra, simile a quella che limita l' ombra del disco. Indi, le parti laterali della lastra mostransi, per 6 ad 8 cm., a partire dallo estremo l, più chiare di una striscia oscura centrale, corrispondente all' ombra della striscia di piombo. Queste regioni laterali chiare e degradate confermano la supposta flessione degli X, debole ma estesa a 6 od a 8 cm. Il fenomeno è, in qualcuna di queste lastre, ben più distinto di quello osservato con l' ombre dei dischi.

Se invece del *focus* s' adopera un Crookes a pera, s' ottengono delle fotografie molto diverse. Nella fig. 3, quì appresso, che rappresenta la positiva di una di coteste immagini, si scorge all' interno del bordo, e vicinissimo ad esso, una riga o frangia assai più oscura del resto dell' ombra. La tinta della riga degrada rapidamente all' interno, per prendere il tono dell' ombra,

e meno rapidamente all' esterno. L' ombra si termina allo esterno bruscamente ed a contorno netto; ed è seguita da una penombra assai pallida, che degrada all' esterno, ed è seguita e terminata da una riga o frangia ben distinta, assai più chiara della penombra, e del campo colpito a pieno dagli X.

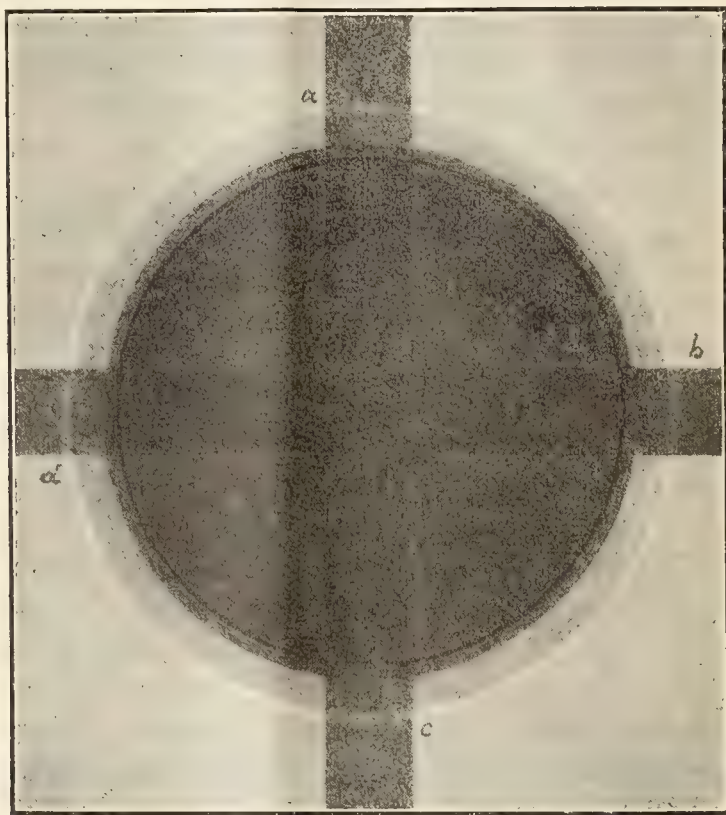



Fig. 3.

Questa riga chiara risponde ad un vero rinforzo di radiazione, come quella oscura ad una diminuzione, quasi fossero delle frange d' interferenza.

In alcune esperienze, invece della croce di piombo ne adoperai una sottile di zinco, un po' trasparente. Nella positiva ottenuta, che è proprio quella riprodotta della fig. 3, le braccia della croce sono alquanto sbiadite, ed attraversate in a, b, c, d, dalla frangia chiara, detta di sopra. Lo che mostra, che le radiazioni, lungo la detta frangia, furono rinforzate e traversarono le braccia della croce. Nel resto la fotografia è simile a quella ottenuta col *focus.* Vi si veggono i settori, forse più chiari alla periferia che al centro (1), per una probabile ed estesa, ma debole flessione delle radiazioni.

È bene avvertire, che volendo osservare le frange sulle positive occorre tirarle molto oscure; e per osservare i diversi toni dei settori e della croce bisogna tirare delle positive deboli.

(1) La figura, per errore, è più chiara al centro che alla periferia: in realtà la croce pare si perda verso il centro perchè ivi i settori appariscono più oscuri o più neri.

Il Crookes a pera, che usai in queste prove aveva, come di solito, verso il centro dell' anticatodo, un' ampia macchia poco luminosa. Per variare l' esperienza feci uso di un Crookes sferico, come quello della fig. 4, col catodo in *c*, avanti al quale fissai il solito disco di piombo *d* e la lastra Lumière *l*. La fotografia che ottenni è identica a quella prodotta col Crookes a pera, ed indicata della fig. 3. Così che risulta, da queste prove almeno, che i Crookes danno delle figure diverse dai *focus*.

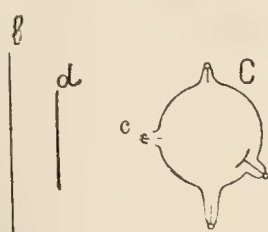



Fig. 4.

In conclusione, da queste varie prove fotografiche possiamo concludere:

1° Che l' ombra d' un corpo che intercetta le radiazioni d' un *focus* è terminata da una fascia chiara, di parecchi millimetri, specie di penombra; terminata bruscamente all' esterno, e degradata rapidamente verso il centro dell' ombra.

2° Che l' ombra d'un corpo che intercetta, invece, le radiazioni d'un Crookes, si termina con bordo netto e tagliente; presso il bordo, nell' interno dell' ombra, scorgesi una riga o frangia nera; oltre il bordo osservasi una penombra pallida, degradata all' esterno, larga parecchi millimetri, che è seguita da una riga o frangia assai chiara, per rinforzo di radiazioni. Queste due frange, la chiara e la scura, ricordano quasi quelle di diffrazione.

3° L' ombra piena e centrale sembra gradatamente più oscura dalla periferia al centro, per una probabile ed estesa flessione degli X nell' ombra generata da un corpo opaco che li intercetta.

Fisica. — *Sull' interpretazione cinematica del fenomeno di Zeeman*. Nota del Corrispondente A. Righi.

Il sig. Cornu [1] ha dato, pel fenomeno scoperto dal dott. Zeeman, una interpretazione puramente cinematica ed indipendente da ogni teoria speciale, simile a quella adottata per la rotazione magnetica del piano di polarizzazione. Se per semplicità si considera soltanto il caso in cui la luce è emessa nella direzione delle linee di forza magnetiche, l' interpretazione di Cornu consiste nell' ammettere, che ogni raggio luminoso si scinda in due raggi polarizzati circolarmente in senso opposto, e che il loro periodo divenga per l' uno maggiore e per l' altro minore, del periodo vibratorio della luce emessa in assenza del campo magnetico.

Perciò la differenza fra il fenomeno di Zeeman e quello di Faraday sarebbe questa, che nel primo caso, e cioè quando la forza magnetica agisce sul corpo, che emette la luce, le velocità di propagazione dei due raggi cir-

[1] Journal de Physique, décembre 1897.

colari conservano naturalmente il valore che avevano prima che si creasse il campo magnetico, ma è alterato il loro periodo vibratorio, mentre che nel secondo, e cioè quando le forze magnetiche agiscono sul corpo attraversato dalla luce, il periodo resta quel che era prima, ma è variata la velocità con cui i due raggi si propagano.

È noto d'altra parte, che la luce, che esce da un nicol animato da un moto di rotazione uniforme intorno al proprio asse, si può considerare come costituita da due raggi circolari inversi di $N+n$ e di $N-n$ vibrazioni al secondo, essendo N il numero di vibrazioni per secondo della luce incidente, ed n il numero di giri che fa il nicol ogni minuto secondo. Ciò fu dimostrato da Airy. Più tardi, e cioè in una mia Memoria pubblicata quindici anni fa (1), dimostrai che si possono ottenere in altri modi delle analoghe variazioni di periodo in un raggio polarizzato. Così per esempio, se insieme al nicol gira una lamina quarto-d'-onda, la quale sia ad esso collegata in modo che il sistema generi un raggio polarizzato circolarmente, il raggio emergente è pure circolare e di egual senso del raggio che si ha, quando il sistema è immobile, ma il numero delle sue vibrazioni per secondo è aumentato (o diminuito, secondo il senso della rotazione) del numero di giri, che il sistema compie ogni minuto secondo; oppure, se un raggio polarizzato circolarmente si fa passare per una lamina mezz'-onda, che faccia nel proprio piano n giri al secondo, il raggio, dopo avere attraversato la lamina girante è circolare ancora, ma di senso inverso a prima, ed il suo numero di vibrazioni e $N+2n$, o $N-2n$, secondo il senso della rotazione (2).

Nella stessa Memoria descrissi poi delle esperienze, colle quali si possono ottenere le frangie d'interferenza dovute all'incontro fra due fasci luminosi ridotti ad avere, mediante uno dei metodi ricordati più sopra, numeri di vibrazioni differenti. Le dette frangie differiscono dalle ordinarie frangie d'interferenza in ciò, che invece di essere fisse scorrono con moto uniforme in direzione perpendicolare alla loro direzione, ed il fenomeno costituisce la realizzazione dei battimenti prodotti con vibrazioni luminose, essendo perfettamente simile a quello da me ottenuto più tardi con una disposizione speciale mediante le onde generate da due diapason (3).

(1) Mem. della R. Acc. di Bologna, seduta del 14 gennaio 1883.

(2) La riga spettrale di un tal raggio, così modificato nel suo periodo, deve occupare una nuova posizione, in ragione del nuovo suo numero di vibrazioni per secondo. Ciò è quanto costituisce l'essenza del fenomeno di Zeeman. Verdet ed altri ammisero che anche nel caso dei due raggi prodotti dal nicol girante ogni riga debba sdoppiarsi, mentre in quella mia Memoria addussi delle ragioni, che mi facevano inclinare per un opposto parere; ma di recente il sig. Corbino (Rend. 17 aprile 1898) ha sostenuto di nuovo il modo di vedere del Verdet, che bisognerà adottare, qualora si ammetta l'interpretazione del Cornu.

(3) *Di un nuovo apparecchio per l'interferenza delle onde sonore.* Memorie della R. Accademia di Bologna, 14 febbraio 1892.

Poichè secondo il Cornu nel fenomeno di Zeeman si ha direttamente la produzione di due raggi circolari inversi di diverso numero di vibrazioni, sorge il quesito di sapere se, per mezzo dei medesimi, sia o no possibile ottenere quel medesimo fenomeno dei battimenti, che ottenni facendo interferire i due raggi circolari prodotti colla rotazione di un nicol, o con uno degli altri metodi analoghi. È chiaro che, se la cosa fosse possibile, il fenomeno di Zeeman potrebbe essere svelato anche quando si producesse colla minima intensità. Infatti, nelle esperienze di Zeeman il numero di vibrazioni proprio di uno dei raggi circolari differisce da quello della luce prodotta senza l'azione del campo magnetico, di alcune migliaia di milioni, e lo sdoppiamento delle righe è appena sensibile, mentre coll'esperienza dei battimenti il fenomeno sarebbe evidente anche quando il campo magnetico modificasse di una unità o anche meno il numero delle vibrazioni. Anzi l'effetto sarebbe meglio visibile allorchè fosse così debole giacchè, producendosi un moto traslatorio delle frangie colla velocità di un intervallo fra due frangie consecutive, per ogni unità nella differenza fra i numeri di vibrazioni dei raggi interferenti, le frangie stesse cesserebbero di essere visibili (in causa della persistenza della sensazione luminosa) quando il loro moto risultasse troppo rapido, salvo che ricorrendo a speciali artifici.

Però una simile esperienza non si potrà realizzare impiegando la luce prodotta nell'esperienza di Zeeman. Infatti è verosimile che i due raggi circolari inversi imaginati dal Cornu, provenendo da un raggio di luce naturale, non possano interferire, precisamente come non possono farlo i due raggi polarizzati ad angolo retto, che un corpo birefrangente ricava da un raggio di luce naturale, quand'anche con un mezzo qualunque si riducano ad un medesimo piano di polarizzazione. Ad ogni modo le considerazioni seguenti, che precisano il concetto del Cornu, valgono a stabilire in quali condizioni la proposta esperienza di battimenti sarebbe realizzabile.

Siano

$$x = a \operatorname{sen}(2\pi N t + \alpha)\ ,\quad y = b \operatorname{sen}(2\pi N t + \beta)\ , \tag{1}$$

le componenti, secondo due assi ortogonali, della vibrazione relativa alla luce naturale, emessa senza che agisca il campo magnetico. Tale vibrazione è elittica, ed affinchè rappresenti luce naturale basta supporre, che le quantità a, b, α, β, mutino valore ad intervalli brevissimi in valore assoluto, ma grandi in confronto al periodo $1:N$, in modo però che siano soddisfatte le due seguenti note condizioni: 1° i valori medî di a^2 e di b^2, relativi a quegli intervalli, devono essere eguali; 2° gli analoghi valori medî di $ab \cos(\alpha - \beta)$ e di $ab \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ devono essore nulli.

Cogli usuali procedimenti i valori di x e di y si possono porre sotto altra forma, e precisamente, ponendo:

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \operatorname{sen}(\beta - \alpha)\ ,\quad B^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{sen}(\beta - \alpha)\ ,$$
$$\operatorname{tang} \varphi = (a \operatorname{sen} \alpha - b \cos \beta) : (a \cos \alpha + b \operatorname{sen} \beta)\ ,$$
$$\operatorname{tang} \psi = (a \operatorname{sen} \alpha + b \cos \beta) : (a \cos \alpha - b \operatorname{sen} \beta)\ ,$$

si può scrivere, come d'altronde si può facilmente verificare:

$$x = \frac{1}{2} A \operatorname{sen} (2\pi N t + \varphi) + \frac{1}{2} B \operatorname{sen} (2\pi N t + \psi),$$
$$y = \frac{1}{2} A \cos (2\pi N t + \varphi) - \frac{1}{2} B \cos (2\pi N t + \psi).$$

In tal modo alla vibrazione data restano sostituite due vibrazioni circolari di senso inverso, l'una destrogira rappresentata dal primo termine dei valori di x ed y, e l'altra levogira rappresentata dal secondo termine dei detti valori.

Secondo il Cornu per l'azione del campo magnetico sul corpo che emette la luce, i numeri di vibrazioni di questi due raggi circolari inversi varierebbero, divenendo per esempio N_1 pel raggio destrogiro ed N_2 pel levogiro, e perciò la luce emessa nell'esperienza di Zeeman sarebbe costituita, dal raggio destrogiro:

$$(2) \qquad x = \frac{1}{2} A \operatorname{sen} (2\pi N_1 t + \varphi), \quad y = \frac{1}{2} A \cos (2\pi N_1 t + \varphi),$$

e dal raggio levogiro:

$$(3) \qquad x = \frac{1}{2} B \operatorname{sen} (2\pi N_2 t + \psi), \quad y = -\frac{1}{2} B \cos (2\pi N_2 t + \psi),$$

fra i quali esiste la differenza di fase $\psi - \varphi$, data da

$$\operatorname{tang} (\psi - \varphi) = \frac{2ab \cos (\alpha - \beta)}{a^2 - b^2}.$$

Si comprende come, in causa di questa differenza di fase che varia con a, b, α, β, non sia possibile ottenere delle frangie d'interferenza facendo interferire quei due raggi, e stabilendo fra essi in un modo qualunque delle differenze di cammino. Esaminiamo però ciò che accade adoperando la luce da essi costituita per eseguire una delle mie esperienze di battimenti, e precisamente una di quelle che ho fatto adoperando i raggi circolari inversi prodotti da un nicol girante.

Mediante gli specchi di Fresnel, oppure il biprisma etc., la luce viene dapprima divisa in due fasci coniugati, che vanno a riunirsi su un diaframma o sul piano focale di un oculare. Poi sul cammino percorso da ciascuno di essi si colloca una lamina quarto-d'-onda, le due lamine essendo disposte in modo, che la sezione principale di una sia perpendicolare a quella dell'altra. Con questa disposizione in ciascuno dei due fasci interferenti i due raggi circolari inversi si trasformeranno in due raggi a vibrazioni rettilinee polarizzati ad angolo retto, ed il raggio di N_1 vibrazioni di uno dei fasci sarà polarizzato parallelamente al raggio di N_2 vibrazioni dell'altro fascio. Infine si collocherà un nicol sul cammino dei due fasci interferenti, colla sua sezione principale parallela ad uno dei due piani di polarizzazione delle vibrazioni uscenti dalle lamine quarto-d'-onda, e così non resteranno ad interfe-

rire che un raggio di N_1 vibrazioni in uno dei fasci, ed uno di N_2 vibrazioni, parallele a quelle del primo, nell' altro fascio. Le due vibrazioni interferenti saranno:

$$kA \operatorname{sen}\left(2\pi N_1 t + \varphi + \frac{\pi}{4} - \delta_1\right), \quad -kB \operatorname{sen}\left(2\pi N_2 t + \psi + \frac{\pi}{4} - \delta_2\right),$$

indicando con δ_1 e δ_2 i ritardi di fase dovuti al cammino percorso da ciascun raggio prima di giungere al punto del diaframma che si considera [1].

Per semplicità trascureremo il coefficiente numerico k, e porremo con Becquerel [2] $N_1 = N + n$, $N_2 = N - n$, quantunque questa ipotesi di $N_1 + N_2 = 2N$ non sia necessaria per ciò che segue. La vibrazione risultante nel punto considerato diverrà allora:

$$A \operatorname{sen}\left(2\pi Nt + 2\pi nt + \varphi + \frac{\pi}{4} - \delta_1\right) - B \operatorname{sen}\left(2\pi Nt - 2\pi nt + \psi + \frac{\pi}{4} - \delta_2\right),$$

e la sua intensità I sarà data da

$$I = A^2 + B^2 - 2AB \cos(4\pi nt - \delta_1 + \delta_2 - \psi + \varphi),$$

o anche, introducendo in luogo di A, B, e $\psi - \varphi$ i loro valori

$$I:2 = a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\cos(4\pi nt - \delta_1 + \delta_2) - 2ab\cos(\alpha - \beta)\operatorname{sen}(4\pi nt - \delta_1 + \delta_2).$$

Ora, mentre dalla prima espressione di I risulta che, come è stato detto più sopra, occorre che $\psi - \varphi$ sia costante, onde si manifestino le frangie, dalla seconda espressione si ricava, che questa condizione non è sufficiente.

Infatti, si faccia astrazione per un momento dalla presenza di t nelle espressioni trigonometriche. Si vede allora, che sino a tanto che restano soddisfatte le condizioni relative alla luce naturale (cioè valori medî di $a^2 - b^2$ e di $ab\cos(\alpha - \beta)$ eguali a zero), il valore medio di I è $2(a^2 + b^2)$, e non dipende da $\delta_1 - \delta_2$. Ma ciò si può ritenere vero anche ad onta della presenza di t, giacchè, specialmente nelle condizioni sperimentali in cui si potrebbero vedere quelle frangie in moto, il seno ed il coseno variano con un periodo $1:n$ grandissimo, in confronto ai periodi ai quali si riferiscono quei valori medî.

Dunque perchè le frangie si formino occorre che i valori medî di a^2 e di b^2 cessino dall' essere eguali. La luce da cui si parte non è allora più luce naturale, ma luce polarizzata elitticamente.

[1] Se le lamine quarto-d'-onda hanno le sezioni principali a 45° coll' asse delle y, e se il nicol lascia passare le vibrazioni parallele a questo asse, si trovano appunto i valori $\frac{1}{2} A \operatorname{sen}(2\pi N_1 t + \varphi - \delta_1) + \frac{1}{2} A \cos(2\pi N_1 t + \varphi - \delta_1)$, $-\frac{1}{2} B \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \psi - \delta_2) - \frac{1}{2} B \cos(2\pi N_2 t + \psi - \delta_2)$, per cui k è eguale ad $1:\sqrt{2}$.

[2] Journal de Physique, décembre 1897, pag. 681.

Ed invero, se chiamiamo p e q i semiassi della vibrazione elittica rappresentata dalle (1), ed ω l'angolo che uno di essi fa con uno degli assi coordinati, si hanno le note relazioni

$$p^2 = a^2 \cos^2 \omega + b^2 \operatorname{sen}^2 \omega + ab \operatorname{sen} 2\omega \cos(\alpha - \beta),$$
$$q^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega - ab \operatorname{sen} 2\omega \cos(\alpha - \beta),$$
$$\operatorname{tang} 2\omega = \frac{2ab \cos(\alpha - \beta)}{a^2 - b^2}.$$

Cioè $\operatorname{tang}(\psi - \varphi) = \operatorname{tang} 2\omega$. Il supporre $\psi - \varphi$ costante equivale dunque all'imporre la condizione, che la vibrazione elittica abbia i suoi assi con orientazione costante; e siccome si può ancora scrivere:

$$p^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) + \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2) : \cos 2\omega \;,\quad q^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) - \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2) : \cos 2\omega,$$

così si vede che, fino a che i valori medî di a^2 e b^2 restano eguali, sono eguali pure quelli di p^2 e q^2. In altri termini, la luce prodotta (senza l'azione del campo magnetico) e colla condizione $\psi - \varphi = \text{cost.}$, è luce polarizzata circolarmente, quale quella che si ottiene facendo passare la luce naturale attraverso un nicol seguìto da una lamina quarto-d'-onda orientata a 45°.

Ma se si ammette debbano essere non più eguali fra loro i valori medî di a^2 e b^2, nel qual caso le frangie si producono, i valori medî di p^2 e q^2 sono pure differenti fra loro, e la luce è a polarizzazione elittica. È questa la condizione affinchè sotto l'azione del campo magnetico la luce emessa possa produrre le frangie d'interferenza in moto, ossia i battimenti.

È chiaro che i minimi in queste frangie non sono nulli in generale; perchè lo sieno è necessario sia verificata una condizione di più.

Infatti, siccome la funzione trigonometrica contenuta nel primo dei due valori scritti di I ha per valori estremi $+1$ e -1, onde si possa avere $I = 0$ occorre che sia $A^2 + B^2 = \pm 2AB$ ossia $\operatorname{sen}(\beta - \alpha) = 0$. La luce deve essere cioè a vibrazioni rettilinee, quando non agisce il campo magnetico.

È quasi superfluo il far notare che il valore di I mostra come le frangie si spostino con tale velocità, che $2n$ di esse passano nell'unità di tempo, per ogni punto del diaframma.

Se l'esperienza dei battimenti non è possibile adoperando la luce che viene prodotta nell'esperienza di Zeemann, non vi è motivo di supporre a priori che altrettanto debba accadere con ogni altra sorgente. Per esempio, se è vero che certi corpi cristallizzati emettono per fluorescenza luce polarizzata, si potrebbe forse raggiungere l'intento adoperando una tale luce, dato che sulla sua emissione il campo magnetico eserciti un'azione del genere di quella che, secondo il Cornu, dà origine al fenomeno di Zeeman. Disgraziatamente sembra che quella luce di fluorescenza sia praticamente troppo debole, perchè sia sperabile di ottenere qualche risultato, per mezzo degli apparecchi usuali.

Aggiunta. — Se nelle espressioni (2) e (3) si introducono i valori di A, B, φ, ψ, e si riuniscono le componenti prese secondo un medesimo asse, si ottiene:

$$2x = a \operatorname{sen}(2\pi N_1 t + \alpha) - b \cos(2\pi N_1 t + \beta) + a \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \alpha) + \\ + b \cos(2\pi N_2 t + \beta),$$

$$2y = a \cos(2\pi N_1 t + \alpha) + b \operatorname{sen}(2\pi N_1 t + \beta) - a \cos(2\pi N_2 t + \alpha) + \\ + b \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \beta).$$

Se ora si pone $2n = N_1 - N_2$, $2N_0 = N_1 + N_2$, queste espressioni si trasformano nelle seguenti:

$$x = \quad a \cos(2\pi nt) \operatorname{sen}(2\pi N_0 t + \alpha) + b \operatorname{sen}(2\pi nt) \operatorname{sen}(2\pi N_0 t + \beta),$$

$$y = - a \operatorname{sen}(2\pi nt) \operatorname{sen}(2\pi N_0 t + \alpha) + b \cos(2\pi nt) \operatorname{sen}(2\pi N_0 t + \beta).$$

Queste formole dimostrano, che l'effetto dovuto al campo magnetico consiste in una rotazione uniforme della vibrazione data, in ragione di n giri al secondo, ed in senso destrogiro. Naturalmente se si fosse assunto $N_2 > N_1$, la rotazione sarebbesi trovata di senso opposto.

Infatti, le due componenti x ed y sono quelle di una vibrazione $a \operatorname{sen}(2\pi N_0 t + \alpha)$, che fa coll'asse delle x un angolo $2\pi nt$ (contato in senso destrogiro) e di una vibrazione $b \operatorname{sen}(2\pi N_0 t + \beta)$, che fa un angolo $2\pi nt$ coll'asse delle y.

Ne risulta che, se si potesse imprimere alla sorgente luminosa una rotazione uniforme, in ragione di n giri al secondo, si avrebbe lo stesso effetto che ha ottenuto Zeeman facendo agire un intenso campo magnetico. Occorrerebbe però una velocità angolare tanto grande da essere praticamente irrealizzabile per ottenere un sensibile sdoppiamento delle righe spettrali, e coi mezzi attuali l'esperienza non sarebbe neppure da tentare.

Dall'essere l'effetto prodotto dal campo magnetico sulla sorgente luminosa, equivalente a quello che si otterrebbe imprimendo alla sorgente stessa un moto di rotazione uniforme intorno ad un asse parallelo alle linee di forza magnetica, si deduce quest'altra conseguenza, e cioè, che qualora l'azione del magnetismo si manifestasse sopra un corpo, il quale emettesse luce polarizzata, non occorrerebbe ricorrere all'esperienza dei battimenti, per metterla in evidenza nei casi in cui fosse debolissima, ma basterebbe far passare semplicemente la luce per un analizzatore. Infatti, dopo il passaggio attraverso di questo, si avrebbero in quella luce delle variazioni periodiche d'intensità, con periodo di n massimi e minimi per ogni minuto secondo.

Matematica. — *Sopra alcuni gruppi continui imprimitivi di trasformazioni puntuali dello spazio.* Nota di Gino Fano, presentata dal Socio Cremona.

1. Nel 3° vol. della *Theorie der Transformationsgruppen* del sig. Lie (Abth. II, Kap. 7, 8) sono determinati i varî tipi a cui possono ridursi, mediante trasformazioni puntuali arbitrarie, tutti i gruppi continui primitivi di trasformazioni puntuali dello spazio, ed alcune categorie di gruppi imprimitivi di queste stesse trasformazioni. D' altra parte, in una Memoria comune del sig. Enriques e mia [1] e in due miei lavori successivi [2] è stata data una classificazione completa dei gruppi continui di trasformazioni *cremoniane* dello spazio (dal punto di vista delle trasformazioni stesse); sono stati cioè determinati i tipi a cui questi ultimi gruppi possono ridursi, mediante trasformazioni anche cremoniane (birazionali). Fra i risultati di queste due ricerche deve passare evidentemente la relazione seguente: *Quei gruppi tipici di trasformazioni puntuali che si compongono* (come avviene per la maggior parte di quelli trovati dal sig. Lie) *di trasformazioni cremoniane, devono anche comparire fra i gruppi tipici di queste ultime trasformazioni; ma ad essi possono aggiungersene, in tal caso, degli altri* (birazionalmente distinti dai primi, ma riducibili ad essi, o a qualcuno degli altri tipi di gruppi puntuali, con trasformazioni non cremoniane).

Quanto ai gruppi primitivi, fu già mostrato in uno dei miei lavori cit. [3], che i gruppi tipici di trasformazioni puntuali trovati dal sig. Lie (che sono soltanto gruppi proiettivi, più il gruppo ∞^{10} di tutte le trasformazioni conformi) si incontrano pure nella classificazione dei gruppi cremoniani; e che in quest' ultima classificazione compare altresì *un* gruppo tipico ulteriore — il gruppo ∞^6 delle trasformazioni conformi che mutano in sè una sfera di raggio non nullo —, il quale può ridursi con una trasformazione (2, 1) (razionale in un senso solo) al gruppo delle trasformazioni proiettive che lasciano fissa una quadrica non degenere.

Avendo ora completata [4] anche la classificazione dei gruppi imprimitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio, credo opportuno mettere in relazione i risultati da me ottenuti in proposito con quelli del sig. Lie sui gruppi imprimitivi di trasformazioni puntuali. Vedremo così di quali trasfor-

[1] Annali di Matem., s. 2ª, t. 26 (1897).

[2] Atti della R. Acc. di Torino, vol. 33° (1898); nonchè la Memoria: *I gruppi di Jonquières generalizzati*, che trovasi in corso di stampa presso la stessa Accademia.

[3] Atti della R. Acc. di Torino, vol 33°. Cfr. anche la Memoria cit. del sig. Enriques e mia, § 6.

[4] Nella Mem. cit., *I gruppi di Jonquières generalizzati.*

mazioni geometriche si compongano i gruppi tipici del sig. Lie, pei quali l' illustre Autore si è limitato ad assegnare le trasformazioni infinitesime generatrici; e vedremo pure come alcuni di questi gruppi siano o possano ridursi a sottogruppi dei rimanenti.

2. Il sig. Lie esaurisce la determinazione dei gruppi continui imprimitivi di trasformazioni puntuali dello spazio nei due casi seguenti:

I. Gruppi che trasformano in sè un sistema ∞^1 di superficie, e subordinano sopra ciascuna superficie del sistema un gruppo primitivo;

II. Gruppi che trasformano in sè una congruenza di linee, e operano in modo primitivo sopra questa congruenza.

Nel primo caso egli trova 12 tipi diversi, che distingue coi numeri progressivi [1]...[12] dei §§ 38-40. E a questa stessa condizione I soddisfanno, fra i gruppi cremoniani tipici da me incontrati, soltanto i due seguenti, con alcuni loro sottogruppi (1):

1°. *Gruppo* ∞^{11} *delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^5 *delle quadriche passanti per una retta fissa* (asse di un fascio invariante di piani) *e per un punto fisso fuori di questa retta* (centro di una stella invariante di rette e piani).

2°. *Gruppo* ∞^{2n+9} *delle trasformazioni di ordine* n (≥ 1) *che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^{n+2} *dei coni di ordine* n *aventi una data generatrice* $(n-1)^{\text{pla}}$ *e gli stessi* $n-1$ *piani tangenti lungo questa generatrice.* La detta generatrice è asse di un fascio invariante di piani; e ogni punto di essa è vertice di ∞^{n+1} coni di quel sistema.

Ora, il primo di questi gruppi tipici (completi) coincide col gruppo [10] del sig. Lie (op. e vol. cit., p. 153) determinato dalle trasformazioni infinitesime (in coordinate cartesiane x, y, z):

$$p\,,\,q\,,\,xp\,,\,xq\,,\,yp\,,\,yq\,,\,x\,(xp+yq)\,,\,y\,(xp+yq)$$
$$r\,,\,zr\,,\,z^2r$$

(1) E precisamente quei sottogruppi che operano ancora in modo primitivo sopra ogni piano del fascio invariante. — Non volendo presupporre noti tutti gli sviluppi contenuti nella mia Mem. cit., per poi scegliere, fra i varî gruppi tipici, quelli che soddisfanno alle condizioni qui imposte, basta osservare (cfr. Enriques-Fano, Mem. cit., § 12) che, se sopra ogni superficie del sistema invariante ∞^1 viene subordinato un gruppo primitivo, queste superficie sono certo algebriche e razionali, e il loro sistema è trasformabile birazionalmente in un fascio di piani. E poichè in ciascun piano di questo fascio risulterà invariante *una* rete omaloidica di curve, dovremo trovarci nel caso studiato al cap. IV della mia Memoria; si tratterà cioè di un gruppo equivalente a un gruppo proiettivo sopra una varietà M_3 contenente ∞^1 piani, la quale potrà ridursi ad essere (come ivi è dimostrato) una M_3^3 con ∞^2 direttrici rettilinee, oppure un cono, in questo caso certo di 2ª specie. Rappresentando opportunamente quella M_3^3 e questi coni sullo spazio S_3, i gruppi delle loro trasformazioni proiettive danno luogo rispettivamente ai due tipi di gruppi cremoniani sopra indicati.

alle quali corrispondono le equazioni finite:

$$x' = \frac{ax + by + c}{a_2 x + b_2 y + c_2} \quad y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \quad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

colle due condizioni $[a\, b_1\, c_2] = \alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 1$. Questo gruppo trasforma infatti in sè stesso il sistema lineare ∞^5 di paraboloidi iperbolici:

$$z\,(ax + by) + cx + dy + ez + f = 0$$

aventi un piano direttore parallelo al piano xy, e l'altro (di giacitura variabile) parallelo all'asse z. Lo stesso gruppo opera proiettivamente sul fascio (improprio) dei piani paralleli al piano xy, e sulla stella (impropria) delle rette e piani paralleli all'asse z; esso risulta anzi dalla composizione dei gruppi proiettivi totali (rispett. ∞^3 e ∞^8) di queste due forme.

I gruppi [7], [4], [1] del sig. Lie sono sottogruppi del precedente, ottenuti col fissare rispett. uno, due (infinitamente vicini) o tutti i piani $z =$ cost.

Il secondo dei nostri gruppi tipici completi coincide invece col gruppo [12] del sig. Lie, determinato dalle $2\,n + 9$ trasformazioni infinitesime:

$$\begin{gathered} xq\,,\ xp - yq\,,\ yp\,,\ xp + yq\,,\ r\,,\ zr\,,\ z^2\,r + nz\,(xp + yq) \\ p\,,\ zp\,,\ z^2 p\,,\ \ldots\ z^n p \\ q\,,\ zq\,,\ z^2 q\,,\ \ldots\ z^n q \end{gathered}$$

alle quali corrispondono le equazioni finite:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,; \quad x' = \frac{ax + by + \varphi_n(z)}{(\gamma z + \delta)^n}\,; \quad y' = \frac{cx + dy + \psi_n(z)}{(\gamma z + \delta)^n}$$

dove si può ritenere $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, e $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$ sono polinomi affatto arbitrarî di grado n in z. Questo gruppo trasforma infatti in sè stesso il sistema lineare ∞^{n+2} dei cilindri di ordine n (colle generatrici parallele al piano xy):

$$\lambda x + \mu\, y + f_n(z) = 0$$

dove ancora $f_n(z)$ è un polinomio generico di grado n in z. I detti cilindri hanno la retta all' infinito del piano xy come generatrice $(n - 1)^{\text{pla}}$, e gli $n - 1$ piani tangenti lungo questa generatrice coincidono tutti (il che non costituisce una particolarità dal punto di vista delle trasformazioni birazionali), e coincidono precisamente col piano all' infinito.

I gruppi [11], [9], [8] sono sottogruppi del precedente, e il primo ne è anzi sottogruppo invariante (corrispondente al caso $ad - bc = 1$).

Infine, i gruppi [5] e [6] del sig. Lie contengono trasformazioni infinitesime del tipo:

$$z^m\, e^{\lambda_i z}\, p\ ;\quad z^m\, e^{\lambda_k z}\, q$$

dove le m sono numeri interi non negativi, e le λ sono costanti arbitrarie. Questi gruppi si compongono di trasformazioni (algebriche e) birazionali soltanto quando si annullino tutte le λ; e possono anche ridursi a tali quando siano nulli tutti gli esponenti m, e le λ siano numeri interi; ma in ambo i casi si hanno soltanto sottogruppi del gruppo [12]. Altrettanto dicasi dei gruppi intransitivi [2] e [3], nelle cui trasformazioni infinitesime compaiono, come moltiplicatori di p e q, delle funzioni arbitrarie $Z(z)$, che, per gruppi cremoniani, sarebbero razionali e si potrebbero anche supporre intere (op. e vol. cit., p. 147).

Esclusi pertanto questi casi di gruppi non cremoniani nè riducibili a tali, *tutti gli altri fra i tipi* [1]...[12] *del sig. Lie coincidono con uno dei nostri due gruppi cremoniani tipici o con uno dei loro sottogruppi.*

3. Passiamo ora ad esaminare i gruppi continui che lasciano fissa una conseguenza di linee, ed operano su di essa in modo primitivo. Questi gruppi, ove si compongano di trasformazioni cremoniane [1], si riducono birazionalmente a uno dei tre tipi seguenti (e loro sottogruppi):

1) Lo stesso gruppo 1° (∞^{11}) della categoria precedente;

2) *gruppo* ∞^8 *delle trasformazioni cubiche che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^7, *di grado 6, delle superficie del 3° ordine passanti per una cubica sghemba* (σ), *e aventi un dato punto doppio* (P) (centro di una stella invariante di rette e piani) *posto sopra quella cubica.* Questo sistema lineare ∞^7 è somma della stella di piani P e della rete, pure invariante, delle quadriche passanti per la cubica σ;

3) *gruppo di dimensione* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+9$ *delle trasformazioni di ordine n che mutano in sè stesso il sistema lineare* $\infty^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ *delle superficie di ordine n aventi un dato punto* $(n-1)^{\text{plo}}$ — centro di una stella invariante di rette e piani — *e uno stesso cono tangente di ordine* $n-1$ *in questo punto.*

Nel caso di trasformazioni semplicemente puntuali, il sig. Lie ha trovati i tipi [13]....[33] dei §§ 42-44, in numero totale di *ventuno.* Fra questi, i tipi [13]....[26] sono tutti (o possono ridursi a) sottogruppi dei rimanenti *sette*; non esclusi nemmeno i gruppi [16] e [24], pei quali la detta

(1) Nella Mem. cit. del sig. Enriques e mia (§§ 15-16) è dimostrato che in questo caso la congruenza invariante si compone necessariamente di curve algebriche e razionali, ed è essa stessa algebrica, razionale, del 1° ordine, e trasformabile birazionalmente in una stella di rette. La determinazione dei vari tipi corrispondenti a questo caso trovasi nel cap. VII della mia Mem.: *I gruppi di Jonquières generalizzati.*

proprietà non risulta evidente, ma dei quali è dimostrato altrove ([1]) come possano ridursi a gruppi proiettivi trasformanti in sè un complesso lineare di rette e *un* punto col suo piano polare rispetto al complesso; e quindi a sottogruppi di [32], corrispondentemente al caso $n = 1$.

I gruppi [27]...[33] sono quelli che operano in modo ∞^8 sulla congruenza di linee invariante. Fra essi, il [33] coincide col gruppo [10], ossia col gruppo ∞^{11} di trasformazioni quadratiche già considerato, e in questo è contenuto come sottogruppo il [28].

Il gruppo [27] determinato dalle otto trasformazioni infinitesime:

$$p\,,\, q\,,\, xq + r\,,\, xp - yq - 2zr\,,\, yp - z^2 r\,,\, xp + yq$$
$$x^2 p + xyq + (y - xz)r\,,\, xyp + y^2 q + z\,(y - xz)r$$

alle quali corrispondono le equazioni finite:

$$x' = \frac{ax + by + c}{a_2 x + b_2 y + c}\;;\quad y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$$
$$z' = \frac{\mathrm{A}z - \mathrm{B} + \mathrm{C}(y - xz)}{-\mathrm{A}_1 z + \mathrm{B}_1 - \mathrm{C}_1(y - xz)}$$

dove le lettere maiuscole indicano i subdeterminati di 2° ordine del determinante $[a\, b_1\, c_2]$ (che può supporsi $= 1$), è birazionalmente identico al 2° dei nostri gruppi cremoniani tipici. Esso trasforma infatti in sè stessa la stella (impropria) di piani:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

nella quale subordina il gruppo proiettivo totale ∞^8; e trasforma anche in sè la rete di paraboloidi iperbolici:

$$y - xz + \lambda z + \mu = 0$$

e quindi il sistema lineare ∞^7 di superficie cubiche, somma dei due precedenti sistemi ∞^2:

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y)(y - xz) + (\alpha_2 x + \beta_2 y)z + \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma z + \delta = 0.$$

L'unica differenza fra il gruppo 2° dianzi definito e quest'ultimo consiste in ciò: che la rete delle quadriche passanti per la cubica σ è ora sostituita da quella dei paraboloidi iperbolici $y - xz + \lambda z + \mu = 0$, aventi a comune le rette all'infinito dei piani xy e yz, e raccordati anzi lungo la prima di esse; sicchè la congruenza delle corde di σ risulta sostituita dalla congruenza lineare speciale delle rette (parallele al piano xy) intersezioni

([1]) *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. II, § 109, p. 445. La riduzione di cui sopra si ottiene mediante la sostituzione: $x_1 = x\,,\, y_1 = \frac{1}{2}y\,,\, z_1 = z - \frac{1}{2}xy$.

variabili di questi paraboloidi: o anche, si può dire, la cubica σ si è spezzata in tre rette, due delle quali, infinitamente vicine (le direttrici di quella congruenza lineare speciale), si appoggiano alla terza. Ora tutto ciò è affatto inessenziale; e lo prova il modo stesso in cui, nella mia Mem. cit. (n. 28), fu costruito il gruppo 2° di questa categoria; appoggiandosi soltanto cioè sul fatto che, oltre alla stella P di rette e piani, fosse invariante una seconda congruenza del 1° ordine, composta di linee contenute rispett. nei piani di quella stella (*una* per ciascun piano), e unisecanti i raggi della stella contenuti in detti piani. A questa condizione soddisfanno tanto la congruenza delle corde della cubica σ passante per P, quanto una qualsiasi congruenza lineare, anzi ogni congruenza di rette di 1ª classe rispetto alla quale P sia punto generico [1].

Il gruppo [32] determinato dalle $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+9$ trasformazioni infinitesime:

$$p\,,\, q\,,\, xq\,,\, xp - yq\,,\, yp\,,\, xp + yq\,,\, x^2p + xyq + nxzr\,,\, xyp + y^2q + nyzr$$
$$zr \quad x^\varrho y^\sigma r \quad (\varrho + \sigma = 0\,,1\,,2\,,\dots n)$$

alle quali corrispondono le equazioni finite:

$$x' = \frac{ax + by + c}{a_2x + b_2y + c_2}\,; \quad y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\,; \quad z' = \frac{z + \Phi_n(xy)}{(a_2x + b_2y + c_2)^n}$$

dove Φ_n è un polinomio affatto arbitrario di grado n nelle variabili $x\,,y$, coincide (per $n > 0$) col 3° dei nostri gruppi cremoniani tipici (per $n = 0$ si ha invece un sottogruppo di [33]). Esso trasforma infatti in sè stesso il sistema lineare di superficie di ordine n rappresentato dall'equazione:

$$z = F_n(x\,y)$$

dove F_n è pure un polinomio qualsiasi di grado n in $x\,,y$: tale sistema, di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, si compone appunto delle superficie di ordine n che hanno il punto all'infinito dell'asse z come $(n-1)^{\text{plo}}$, e uno stesso cono tangente in questo punto (costituito precisamente dal piano all'infinito contato $n-1$ volta).

Degli altri gruppi trovati dal sig. Lie, il [30] è sottogruppo invariante del precedente, con un solo parametro di meno (e corrisponde al caso $[a\,b_1\,c_2] = 1$); e il [31] è un gruppo proiettivo ∞^9 con un punto fisso e un piano fisso che non si appartengono, sottogruppo quindi di [32] corrispon-

(1) Cfr. anche la prima nota al n. 28 della Mem. stessa.

dentemente al caso $n=1$. Infine il gruppo [29], che contiene le operazioni non algebriche generate dalle trasformazioni infinitesime

$$x^2p+xyq+\frac{3}{2}xr\,,\; xyp+y^2q+\frac{3}{2}yr\,,$$

si riduce a un sottogruppo invariante di [31] colla sostituzione $z=\frac{3}{2}\log z'$.

Concludiamo pertanto: *I tipi* [13] ... [33] *del sig. Lie coincidono tutti con uno dei tre gruppi cremoniani tipici di questa categoria* II, *o con un loro sottogruppo.*

4. Per gli altri gruppi imprimitivi di trasformazioni puntuali (quelli cioè che lasciano invariata una congruenza di linee e un sistema ∞^1 di superficie appartenenti a questa congruenza) il sig. Lie si limita a indicare per quale via si possa giungere a determinarne tutti i tipi. In particolare, nel caso di un gruppo il quale operi in modo ∞^3 sopra ciascuna linea della congruenza invariante — supposta trasformata questa congruenza (mediante una trasformazione puntuale) nella stella di rette $x=$ cost., $y=$ cost. — egli trova che il gruppo può ridursi a contenere le sole tre trasformazioni infinitesime $r\,,zr\,,z^2r$, più altre i cui simboli sono del tipo:

$$\xi(x,y)\,p+\eta(x,y)\,q$$

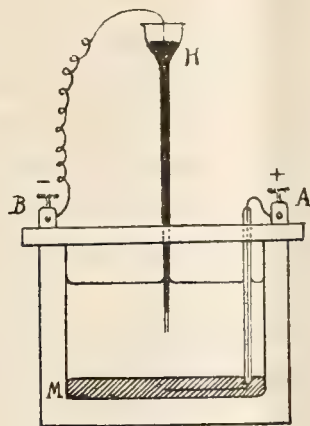
dove la ξ può anche supporsi funzione della sola x (op. e vol. cit., p. 172-73). Le equazioni finite del gruppo avranno allora la forma:

$$x'=f(x\,,y\,,a\,,b\,,...)\,;\quad y'=\varphi(x\,,y\,,a\,,b\,,...)\,;\quad z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

(dove f non contiene y, se questa non compare nelle ξ); e sarà quindi invariante il fascio dei piani $z=$ cost., ossia *un sistema* ∞^1 *di superficie non appartenenti alla congruenza invariante considerata.* Il gruppo proposto potrà dunque ottenersi (dal punto di vista gruppale) per composizione dei due gruppi (affatto indipendenti l'uno dall'altro) subordinati nella congruenza invariante e in quest'ultimo sistema ∞^1 di superficie. — Questa proprietà sussiste naturalmente anche nel caso di un gruppo cremoniano; e acquista anzi allora un'importanza maggiore e un significato molto più preciso, perchè la riduzione di quella congruenza di linee e di questo sistema di superficie rispett. a una stella di rette e a un fascio di piani può ottenersi con una trasformazione anche cremoniana (cfr. il n. 7 della mia Memoria: *I gruppi di Jonquières generalizzati*); sicchè, ciò che prima era soltanto una *proprietà di struttura* del gruppo, diventa ora una proprietà di un gruppo cremoniano, in relazione alla geometria delle trasformazioni cremoniane.

Fisica. — *Sopra una nuova forma dell' elettrometro capillare.* Nota del dott. G. VANNI, presentata dal Socio BLASERNA.

Si può dare all' elettrometro capillare una forma comoda, portatile, che si presta molto bene sia per esperienze di scuola, sia per esperienze di ricerca.

Una vaschetta di vetro rettangolare a facce piane e parallele, contiene una certa quantità di mercurio M, nel quale pesca un filo di platino destinato a funzionare da anodo e connesso con un serrafili A, fissato sopra

una lastra di ebanite che copre, a guisa di coperchio, la vaschetta di vetro. Questa lastra di ebanite porta nel mezzo un tubo di vetro H di 15 cm. circa di lunghezza, affilato inferiormente e destinato a contenere del mercurio, che funge da catodo, e connesso, per mezzo di un filo di platino, a un secondo serrafili B. La parte affilata del tubo è immersa in una soluzione di acqua acidulata con acido solforico al 30 per 100 in peso.

La messa in azione dello strumento è semplice e rapida. Dopo aver versato nella vaschetta il mercurio e, al di sopra, l' acqua acidulata, si mette a posto il coperchio di ebanite con i suoi annessi, e si versa nel tubo H una certa quantità di mercurio, in modo da determinarne, per pressione idrostatica, l' efflusso dalla punta affilata; al cessare dell' efflusso, l' aspirazione che si produce riempie il tubo capillare d' acqua acidulata, stabilendo un buon contatto fra questa e il mercurio, il menisco del quale prende una determinata posizione d' equilibrio, che si assume come zero dello stromento, avendo cura di riunire in corto circuito i due elettrodi A e B. Basta allora intercalare fra questi una differenza di potenziale anche piccolissima, facendo funzionare da catodo il mercurio contenuto nel tubo capillare, perchè si osservi

uno spostamento nel menisco. Con tubi assai affilati si possono mettere in evidenza differenze di potenziale di qualche dieci millesimo di volt; per differenze maggiori bastano tubi a punta anche non molto sottile, di qualche decimo di mm., che si possono ottenere facilmente alla fiamma, proporzionando il diametro stesso alla differenza di potenziale da misurare.

La disposizione stessa dello strumento lo rende adattatissimo per esperienze di scuola, adoperando un apparecchio di proiezione a luce solare o elettrica, munito di un microscopio a conveniente ingrandimento. L' immagine del menisco si proietta così su uno schermo, ed è possibile misurarne lo spostamento adattando una scala millimetrica sopra una delle facce della vaschetta di vetro. Si possono così ripetere innanzi ad un numeroso uditorio tutte le esperienze del Volta sulla forza elettromotrice di contatto; e siccome, per piccole differenze di potenziale, lo spostamento del menisco è sensibilmente proporzionale alle differenze stesse, si può, giovandosi di una disposizione facile a immaginare, mostrare la distribuzione dei potenziali in un breve tratto di conduttore filiforme, percorso da una corrente di una sola Daniell. Mettendo gli estremi dell' apparecchio in relazione con un circuito indotto, si può porre in evidenza la diseguaglianza delle due forze elettromotrici di apertura e di chiusura e così via; il menisco prende sempre la sua posizione di equilibrio rapidamente, senza oscillazioni, mostrando una aperiodicità notevole.

Ma oltre che prestarsi ad esperienze di scuola, l' apparecchio è adatto anche per esperienze di ricerca, sia con correnti continue, sia con correnti alternate. In quest' ultimo caso, il menisco è animato da moto oscillatorio intorno alla posizione di equilibrio, moto che si può analizzare con uno specchio girante per dedurne la forma della oscillazione. Infine, se si rende immobile l' immagine del menisco per mezzo di un disco stroboscopico animato da una velocità di rotazione nota, si potrà facilmente calcolare il periodo del moto vibratorio e quindi la frequenza della corrente. Delle esperienze fatte a questo riguardo mi propongo di parlare in una prossima Nota.

Fisica. — *Sulla determinazione simultanea delle conducibilità termica ed elettrica dei metalli a differenti temperature* [1]. Nota di Paolo Straneo, presentata dal Socio Blaserna.

La presente Nota tratta di alcune misure da me eseguite applicando il metodo svolto in questi Rendiconti a pag. 197 del vol. VII.

Realizzai le condizioni supposte nella teoria mediante un apparato semplicissimo, che si componeva di due piccole cassette di rame applicate alle estremità del filo da studiarsi, nelle quali faceva scorrere rapidamente acqua

[1] Lavoro eseguito per la massima parte nell' Istituto fisico della R. Università di Roma.

a temperatura costante e di un doppio involucro cilindrico avvolgente tutta l'aria che circondava la superficie del filo; fra le due parti di questo involucro scorreva pure acqua alla stessa temperatura.

Il riscaldamento veniva prodotto dalla corrente fornita da due accumulatori accoppiati in parallelo; le temperature venivano misurate mediante piccolissime pile termoelettriche, di cui l' una delle saldature era collocata in uno dei punti voluti dalla teoria e l'altra era immersa nell'acqua corrente, la cui temperatura veniva assunta come zero.

Servirono per queste misure due galvanometri a specchio; l' uno della fabbrica Siemens serviva per determinare lo stato stazionario e fu regolato in modo che le deviazioni prodotte dalla pila termoelettrica collocata nel punto $x = \frac{l}{2}$ quando il filo aveva raggiunto lo stato stazionario fossero ancora leggibili sulla scala; il secondo, appositamente costruito, serviva per la determinazione dello stato variabile nel punto $x = \frac{l}{3}$. Si ebbe perciò cura di scegliere un magnete con un piccolissimo momento d' inerzia ed un ammorzamento conveniente onde ammorzare presto le oscillazioni iniziali, senza però renderlo restio all' influenza delle variazioni della corrente. Questo secondo galvanometro, molto più sensibile del primo, dava per lo stato stazionario deviazioni molto superiori a quelle leggibili sulla scala. In principio ed in fine di ogni esperienza si calibrava, mediante un termometro esatto, ognuna delle pile termoelettriche per rapporto al rispettivo galvanometro.

Per motivi d' indole del tutto pratica preferii osservare solo l'andamento del raffreddamento del filo, quando, dopo avergli fatto raggiungere lo stato termico stazionario, si interrompeva la corrente. In questo modo si evitarono anche gli errori che avrebbe potuto produrre un' eventuale incostanza della corrente.

L'esperienza procedeva nel seguente modo:

Si manteneva dapprima nel filo una corrente costante fino a che fosse raggiunto lo stato stazionario; questa corrente si sceglieva tale da produrre nel punto di mezzo un'elevazione di temperatura di pochi gradi, e si regolava il galvanometro meno sensibile in modo da poterne leggere sulla scala la deviazione, ed il più sensibile in modo che la deviazione prodotta dalla pila termoelettrica collocata nel punto $x = \frac{l}{3}$ corrispondesse al doppio della scala all' incirca. Ciò fatto si calibravano esattamente le due pile termoelettriche inserite ciascuna sui rispettivi galvanometri, e si misurava la temperatura nel punto di mezzo.

Dopo aver letta, mediante un buon amperometro, l'intensità della corrente che attraversava il filo, si rompeva il circuito ad un istante fisso, si attendeva due e minuti, e si cominciavano le osservazioni dello stato variabile, che si ripetevano ogni cinque secondi.

La temperatura stazionaria del punto di mezzo dovendo soddisfare alla equazione:

$$S_m = C\left(1 - \frac{2}{e^{\lambda\frac{l}{2}} + e^{-\lambda\frac{l}{2}}}\right) \qquad \text{(III) pag. 201}$$

ci fornisce un primo elemento per la determinazione dei coefficienti voluti.

Il decremento logaritmico N delle temperature nel punto $x = \frac{l}{3}$ ci dà il secondo elemento coll'equazione:

$$N = \frac{k}{c \cdot \varrho} \frac{1}{l^2} \left(\pi^2 + l^2\lambda^2\right). \qquad \text{(I) pag. 201}$$

Il terzo elemento ci viene finalmente dato dalla media M dei valori dedotti pel coefficiente di e ricordando l'equazione (6) pag. 200. Si avrà:

$$M = 2\frac{C}{\pi} \frac{\lambda^2 l^2}{\lambda^2 l^2 + \pi^2} \sqrt{3}. \qquad \text{(II) pag. 201}$$

È facile dedurre dalle II e III per successive approssimazioni i valori di C e λ. Quest'ultimo sostituito nella I ci darà k. Si determineranno poi h ed ω.

Risultati sperimentali. — Si studiarono due fili di ferro delle lunghezze di 13,5 e 15,0 cm. e di 0,38 cm. di diametro e due fili di rame dello stesso diametro, e di 20 e 22 cm. di lunghezza. Per ognuno di essi si fecero tre serie di misure.

Dopo avere ottenuto con sufficiente esattezza i coefficienti desiderati per la temperatura dell'acqua scorrente, circa 10°, si sostituì all'acqua del vapore d'acqua alla temperatura di circa 100°, e si ripeterono in modo identico le esperienze. I risultati sono riuniti nelle seguenti tabelle:

1° *Filo di ferro.* $l = 13,5$ cm., $d = 0,88$ cm., $\varrho = 7,8$, $i = 1,22$ CGS

	Temperatura 10°	$c = 0,1060$		Temperatura 100°	$c = 0,1124$	
1ª esperienza	$S_m = 3{,}08$	N = 0,1390	M = 2,80	$S_m = 4{,}15$	N = 0,1299	M = 3,77
2ª »	» 3,06	» 0,1396	» 2,78	» 4,15	» 0,1282	» 3,79
3ª »	» 3,07	» 0,1370	» 2,70	» 4,18	» 0,1271	» 3,90
Media	$S_m = 3{,}07$	N = 0,1385	M = 2,76	$S_m = 4{,}16$	N = 0,1284	M = 3,82
	$k_{10} = 0{,}148$, $h_{10} = 0{,}00030$, $\omega_{10} = 9652$			$k_{100} = 0147$, $h_{100} = 0{,}00032$, $\omega_{100} = 14100$		

2° *Filo di ferro.* $l = 15{,}0$ cm., $d = 0{,}38$ cm., $\varrho = 7{,}8$, $i = 1{,}22$ CGS

	Temperatura 10°	$c = 0{,}1060$		Temperatura 100°	$c = 0{,}1124$	
1ª esperienza	$S_m = \overset{o}{3{,}25}$	N = 0,1180	M = 2,90	$S_m = \overset{o}{4{,}74}$	N = 0,1151	M = 4,18
2ª »	» 3,26	» 0,1174	» 3,01	» 4,58	» 0,1148	» 4,16
3ª »	» 3,07	» 0,1198	» 3,00	» 4,59	» 0,1137	» 4,17
Media	$S_m = 3{,}26$	N = 0,1184	M = 2,97	$S_m = 4{,}64$	N = 0,1145	M = 4,17
	$k_{10} = 0{,}150$, $h_{10} = 0{,}00031$, $\omega_{10} = 9705$			$k_{100} = 0{,}150$, $h_{100} = 0{,}00033$, $\omega_{100} = 14130$		

1° *Filo di rame.* $l = 20$ cm., $d = 0{,}38$ cm., $\varrho = 8{,}8$, $i = 1{,}415$ CGS

	Temperatura 10°	$c = 0{,}0913$		Temperatura 100°	$c = 0{,}0956$	
1ª esperienza	$S_m = \overset{o}{1{,}99}$	N = 0,3945	M = 2,06	$S_m = \overset{o}{2{,}23}$	N = 0,3755	M = 3,40
2ª »	» 1,99	» 0,3910	» 2,06	» 2,24	» 0,3747	» 3,41
3ª »	» 2,00	» 0,3930	» 2,09	» 2,24	» 0,3734	» 3,39
Media	$S_m = 1{,}993$	N = 0,3942	M = 2,07	$S_m = 2{,}236$	N = 0,3745	M = 3,40
	$k_{10} = 0{,}992$, $h = 0{,}00028$, $\omega = 1604$			$k_{100} = 0{,}981$, $h = 0{,}00029$, $\omega = 2140$		

2° *Filo di rame.* $l = 22$ cm., $d = 0{,}38$ cm., $\varrho = 8{,}8$, $i = 1{,}415$ CGS

	Temperatura 10°	$c = 0{,}0913$		Temperatura 100°	$c = 0{,}0956$	
1ª esperienza	$S_m = \overset{o}{2{,}10}$	N = 0,3318	M = 2,15	$S_m = \overset{o}{2{,}30}$	N = 0,3100	M = 2,881
2ª »	» 2,00	» 0,3304	» 2,13	» 2,27	» 0,3192	» 2,871
3ª »	» 1,94	» 0,3293	» 2,12	» 2,26	» 0,3163	» 2,840
Media	$S_m = 2{,}01$	N = 0,3305	» 2,133	$S_m = 2{,}276$	N = 0,3152	M = 2,864
	$k_{10} = 0{,}994$, $h_{10} = 0{,}00027$, $\omega_{10} = 1615$			$k_{100} = 0{,}986$, $h_{100} = 0{,}00028$, $\omega_{100} = 2160$		

Conclusione. — Da queste misure si vede chiaramente che le variazioni del coefficiente di conducibilità termica interna in funzione della temperatura sono molto piccole e non si possono determinare con esattezza cogli attuali metodi, i quali permettono di raggiungere al più la sicurezza dell 1 °/₀.

Il coefficiente di conducibilità termica esterna aumenta colla temperatura, ma in minor grado del potere dispersivo dei corpi quando vengano riscaldati a temperature sempre più elevate, restando costante quella dell'aria ambiente.

La quale cosa dimostrerebbe che l'aumento del potere dispersivo è non solo funzione crescente colla temperatura assoluta di un corpo, come il coefficiente di calore specifico, ma anche una funzione almeno quadratica della differenza fra la temperatura del corpo e quella dell'aria.

Finalmente la resistenza elettrica specifica risulta da queste misure crescente colla temperatura assoluta, nelle proporzioni note. Siccome la deduzione del coefficiente di conducibilità elettrica è appunto la parte di questa ricerca meno suscettibile di esattezza, questa concordanza coi risultati ottenuti con metodi speciali prova la sicurezza del metodo esposto.

Fisica terrestre. — *La comparsa di fiamme nel cratere vesuviano.* Nota del prof. R. V. Matteucci, presentata dal Corrispondente F. Bassani.

Le fiamme vulcaniche, vedute e descritte da parecchi osservatori, ed ammesse dalla grande maggioranza di coloro che si occuparono di vulcanologia, furono poste in dubbio da altri.

Sebbene spesso, specie da scrittori antichi, siano stati chiamati fiamme forse altri svariati fenomeni a tutti noti e facilmente distinguibili da quelle, tuttavia dalla maggior parte degli osservatori non credo siano state confuse con altri fenomeni le vere fiamme di cui ognuno sa apprezzare i caratteri.

Su le fiamme vulcaniche esiste una ricca letteratura, benchè nessun autore, ad eccezione del Pilla, ne abbia fatto argomento di uno studio speciale. Io mi propongo di parlarne più estesamente in seguito; ma intanto trovo opportuno comunicare quanto io osservai al Vesuvio in diverse notti del mese di aprile u. s. (1).

È indispensabile premettere che il vasto cratere, formatosi per sprofondamento nell'istante in cui si stabilì l'attuale eruzione (3 luglio 1895), ha subìto via via insignificanti allargamenti. Una vistosa demolizione però vi è avvenuta la notte 9-10 aprile nella sua parete meridionale. In seguito a codesta ingente frana, una grande quantità di vecchie lave e scorie è precipitata giù nella voragine craterica, con evidente tendenza ad occuparne per intero il fondo e ad ostruire l'apertura del condotto vulcanico.

Da quel momento, le forti esplosioni che caratterizzavano l'attività nei giorni precedenti, divennero addirittura insignificanti, e subentrò un periodo solfatarico violento, accompagnato di quando in quando da piccoli slanci di massi infuocati; slanci, che nulla avevano che fare con le vere e proprie esplosioni, e che erano unicamente prodotti dall'azione meccanica della sfuggita degli aeriformi sotto forte pressione.

(1) Vedi: *Corriere di Napoli*, nn. 108 e 116. (20 e 28 aprile 1898).

Queste le condizioni fisiche del cratere, che sono perdurate 19 giorni e che probabilmente hanno in gran parte influito (oltre a quelle chimiche del magma) a determinare il fenomeno delle fiamme; inquantochè i gas combustibili sottostanti a quel materiale caotico, forzati dalla propria tensione ad attraversarlo in uno stato di grande suddivisione, dovettero trovare forse condizioni più adatte all' accensione.

Il fondo craterico era dunque occupato dal detto materiale detritico, che, dove più dove meno, era reso incandescente dall' elevata temperatura proveviente dal di sotto. Da parecchie plaghe di rottami maggiormente infuocati si sprigionavano fiammelle di forse un paio di metri di altezza, di un colore cangiante fra il turchino e il verde, che vibravano tranquillamente. Nella regione centrale del fondo craterico era però concentrata la massima attività. Quivi, da una cavità completamente infuocata (5 o 6 m. lunga, e larga forse 2 m.), divampava un fascio di fiamme con enorme impeto continuato, emettendo un rumore pari a quello di una colossale forgia od a quello delle onde del mare che si frangono negli scogli durante una forte burrasca. Queste fiamme, dell' altezza oscillante fra i 30, 40 e 50 metri, di un colore giallo, con sprazzi rossi e violetti, vibravano violentemente e si dileguavano in alto, confondendosi coi proprî prodotti di combustione. Era questo colossale getto di aeriformi che di quando in quando, nei momenti di maggiore tensione, urtando con veemenza contro le pareti della cavità d' onde si sprigionava, ne distaccava numerosi pezzi incandescenti, scagliandoli in aria tutt' all' ingiro, e a ventaglio.

Una delle salienti caratteristiche era che, per tutto il tempo che sono durate codeste grandi fiamme, non si ebbe che rarissimamente una insignificante emissione di sabbie. E questo fatto ha attirato in modo speciale la mia attenzione, giacchè tale persistente sviluppo di puri vapori ha ora segnato una vera interruzione dell' attività esplosiva che da anni perdura incessantemente al Vesuvio.

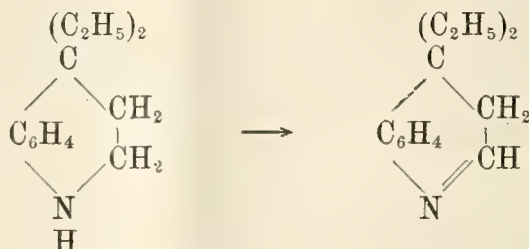
Non è il caso che io mi trattenga in questa breve Nota su altri particolari, cosa che avrò occasione di fare in seguito. Solo desidero richiamare l' attenzione su alcuni punti principali, e cioè: 1° la maggior parte delle sostanze aeriformi coinvolte dai magma vulcanici ha la capacità di ingenerare fiamme; 2° le piccole fiamme nel cratere del Vesuvio sono state assai più durature che quelle grandi; queste ultime, senza intermittenza, non sono durate più di 19 giorni nè meno di 15, ed in ultimo esse si ridussero piccole e tranquille come le altre; 3° il fenomeno complessivo, di cui le fiamme sono state una delle più interessanti estrinsecazioni, sembra paragonabile soltanto a quello descritto da Humphry Davy. Esso non si sarebbe quindi riprodotto, o, per lo meno, non è stato avvertito al Vesuvio da 84 anni; 4° lo spettro prodotto da queste fiamme è continuo, come quello osservato dal Libbey nelle lave incandescenti, pure con fiamme, del Kilauea.

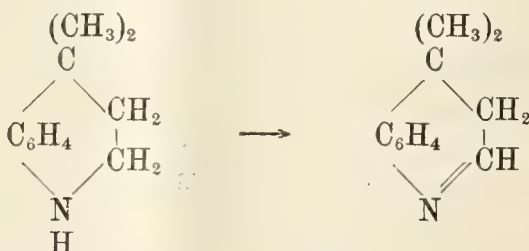
Chimica. — *Sulla metilazione degli indoli.* Nota II [1] di G. Plancher, presentata dal Socio Ciamician.

Le considerazioni fatte fin qui sulle basi derivanti dall' azione del ioduro di etile sul metilchetolo, si possono, non v' ha dubbio, estendere alle basi corrispondenti ottenute per azione del ioduro di metile. Nella serie di quest' ultime mancava finora, come si è visto, un termine corrispondente alla base $C_{13}H_{17}N$.

Recentemente ho potuto colmare questa lacuna per la seguente via:

Dalle cosidette tetraidrochinoline terziarie si può in entrambe le serie per mezzo dell' acido iodidrico passare alle basi secondarie corrispondenti. Di queste la dietiltetraidrochinolina fu ottenuta anche dalla dietildiidrochinolina per riduzione con alcool e sodio, e di recente ho trovato che il passaggio inverso può effettuarsi a mezzo del permanganato a bassa temperatura

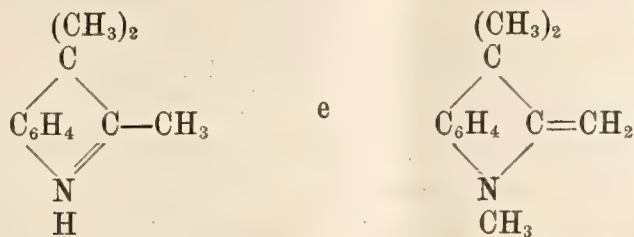
```
      (C2H5)2                  (C2H5)2
        C                        C
      /   \CH2                 /   \CH2
  C6H4     |        —→     C6H4     |
      \   /CH2                 \   //CH
        N                        N
        H
```

Estendendo questa reazione alla dimetiltetraidrochinolina [2] sono riuscito ad ottenere la base cercata $C_{11}H_{13}N$

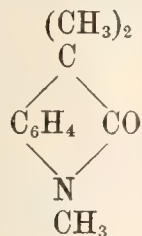
```
      (CH3)2                   (CH3)2
        C                        C
      /   \CH2                 /   \CH2
  C6H4     |        —→     C6H4     |
      \   /CH2                 \   //CH
        N                        N
        H
```

la quale appunto come era da aspettarsi ha la più grande simiglianza colla base $C_{13}H_{17}N$, che le corrisponde nella serie etilica. Colla nomenclatura che finora è stata usata essa sarebbe da dirsi *dimetildiidrochinolina*.

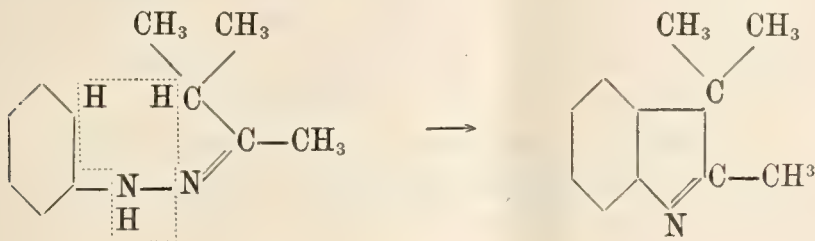
[1] V. pag. 275.

[2] Ferratini, Gazz. Chim. It., 23, 115.

Seguendo invece il nuovo ordine di idee, al nuovo alcaloide $C_{11}H_{13}N$ e alla cosidetta trimetildiidrochinolina spettano le formole

```
   (CH3)2                 (CH3)2
     C                      C
    / \                    / \
 C6H4  C—CH3      e     C6H4  C=CH2
    \ //                   \ /
     N                      N
     H                     CH3
```

Si vede subito che tale formola della diidrotrimetilchinolina spiega assai bene la sua ossidazione a trimetilindolinone ([1])

```
   (CH3)2
     C
    / \
 C6H4  CO
    \ /
     N
    CH3
```

Se tale poi era realmente la costituzione di queste due basi, esse dovevano ottenersi, la prima condensando con cloruro di zinco alcoolico il fenilidrazone del metilisopropilchetone,

```
        CH3  CH3                          CH3  CH3
          \  /                              \  /
  /\ H    H C                        /\_____C
 |  |        \                      |  |    |
 |  |         C—CH3      ——>        |  |    C—CH3
  \/ —N—N//                          \/ \ //
      H                                  N
```

e la seconda metilando la prima.

Le esperienze hanno confermate le mie previsioni. La base ottenuta ha un forte odore zafferanico alquanto rinfrescante, e dopo che ne conobbi bene le proprietà, mi formai la convinzione che anch'essa esiste nei prodotti della reazione del ioduro di metile sul metilchetolo, conforme alle osservazioni di Fischer ([2]).

Questa sintesi fu esposta in una breve Nota da me pubblicata nei primi giorni dell'anno corrente nella Chemicher Zeitung ([3]). In essa, per il suo

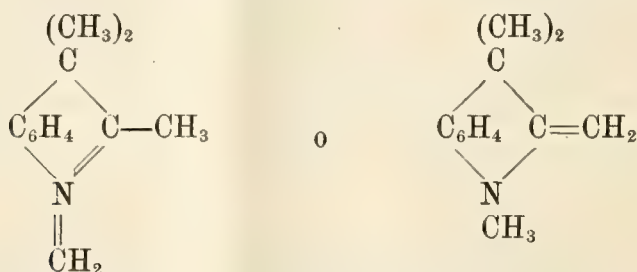
([1]) Ciamician e Piccinini, Gazz. chim. it., 27, α 339.
([2]) Ann. d. Chem., 242, 359.
([3]) Chem. Zeitung, 22, 37.

carattere di Nota preliminare, io non esposi le formole che sono la più probabile conseguenza di questa sintesi, tanto più che tali formole, non avendo nessun precedente, dovevano essere confermate da argomenti ineccepibili. Invece nella presente reazione, di cui non si conosce ancora con certezza il meccanismo, non si poteva ritenere esclusa in modo assoluto la possibilità dell' allargamento del nucleo.

Perciò in quella Nota io mi riserbavo di estendere tale reazione ad altri chetoni ed alle fenilidrazine sostituite.

La più semplice di tali reazioni omologhe è evidentemente la sintesi diretta della cosidetta *trimetildiidrochinolina*, dal metilfenilidrazone del metilisopropilchetone che io avevo già eseguito da qualche mese, e che venne pubblicata recentissimamente da Brunner ([1]).

Egli ritiene che tale sintesi basti a provare per tale base le formole ([2])

$$\begin{array}{ccc} & (CH_3)_2 & \\ & C & \\ \diagup & & \diagdown \\ C_6H_4 & & C—CH_3 \\ \diagdown & & /\!\!/ \\ & N & \\ & \| & \\ & CH_2 & \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{ccc} & (CH_3)_2 & \\ & C & \\ \diagup & & \diagdown \\ C_6H_4 & & C{=}CH_2 \\ \diagdown & & \diagup \\ & N & \\ & CH_3 & \end{array}$$

e ritiene a tale riguardo meno sicura la sintesi da me prima eseguita della stessa base ([3]) perchè la metilazione viene operata sotto pressione ([4]). Nessun altro invero, vorrà attribuire una influenza qualsiasi sull' andamento della reazione alla leggera pressione di 30 cm. di mercurio che si usa in tutte le metilazioni all' unico scopo di trattenere nell' apparecchio i vapori di ioduro di metile, nè paragonare questa pressione a quella che si raggiunge nella reazione di Fischer. A scanso però di ogni falsa interpretazione, dirò anche qui che la base $C_{11}H_{13}N$ si metila anche a temperatura ordinaria senza intervento di pressione alcuna.

Viceversa poi la reazione di Brunner non prova niente di più di ciò che era provato dalla mia e contro di essa valgono sempre le obbiezioni sopra accennate.

Per eliminare ogni dubbio erano necessarie altre ricerche che vennero da me eseguite e che ora espongo.

Per ulteriore metilazione della base di Fischer, Zatti e Ferratini ([5])

([1]) Berl. Berichte 31, 615.

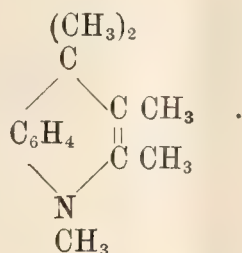
([2]) Credo inutile occuparmi della prima di queste formole che non ha nessuna probabilità.

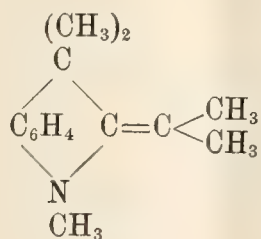
([3]) Chem. Zeitung, 22, 37.

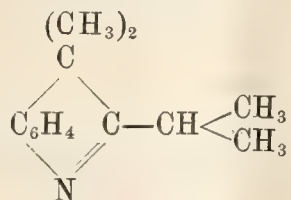
([4]) Berl. Berichte, 31, 615.

([5]) Gazz. chim. it. 20-711 e 21-325.

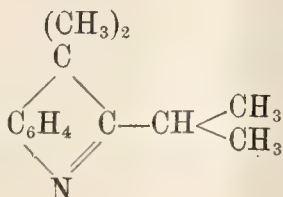
giunsero ad un alcaloide $C_{14}H_{19}N$ che secondo le formole fin qui usate sarebbe una *pentametildiidrochinolina* della costituzione seguente:

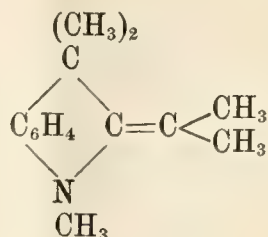
```
        (CH3)2
          C
        /   \
            C CH3  .
   C6H4     ||
            C CH3
        \   /
          N
         CH3
```

Colla formola nuova esso non potrebbe avere che la costituzione seguente:

```
        (CH3)2
          C
        /   \           CH3
   C6H4      C=C<
        \   /           CH3
          N
         CH3
```

Analogamente alla base $C_{12}H_{15}N$ essa doveva ottenersi per condensazione del fenilidrazone del diisopropilchetone e successiva metilazione passando per una base:

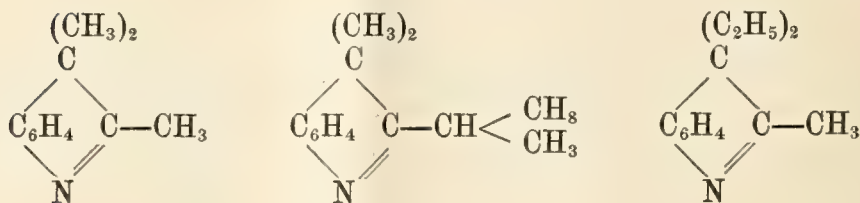
```
        (CH3)2
          C
        /   \            CH3
   C6H4      C—CH<
        \   //           CH3
          N
```

Realizzata questa sintesi viene ad essere tolto il dubbio che nel processo sintetico sia avvenuto l' ingresso di un atomo di carbonio nel nucleo con successivo allargamento, giacchè questo non potrebbe avvenire se non ammetteudo la migrazione di uno dei metili del gruppo isopropilico.

Ho difatti ottenuto l'alcaloide

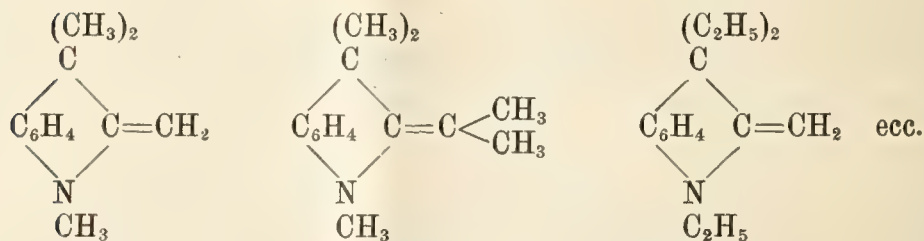
```
        (CH3)2
          C
        /   \            CH3
   C6H4      C—CH<
        \   //           CH3
          N
```

e metilandolo sono passato ad una base

$$\begin{array}{c} (CH_3)_2 \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \\ C_6H_4 \quad C{=}C{<}^{CH_3}_{CH_3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ N \\ CH_3 \end{array}$$

che è identica alla pentametildiidrochinolina.

Per le basi della formola

$$\begin{array}{c} (CH_3)_2 \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \\ C_6H_4 \quad C{-}CH_3 \\ \diagdown \quad /\!\!/ \\ N \end{array} \qquad \begin{array}{c} (CH_3)_2 \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \\ C_6H_4 \quad C{-}CH{<}^{CH_8}_{CH_3} \\ \diagdown \quad /\!\!/ \\ N \end{array} \qquad \begin{array}{c} (C_2H_5)_2 \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \\ C_6H_4 \quad C{-}CH_3 \\ \diagdown \quad /\!\!/ \\ N \end{array}$$

io ho già proposto il nome di *Indolenine.*

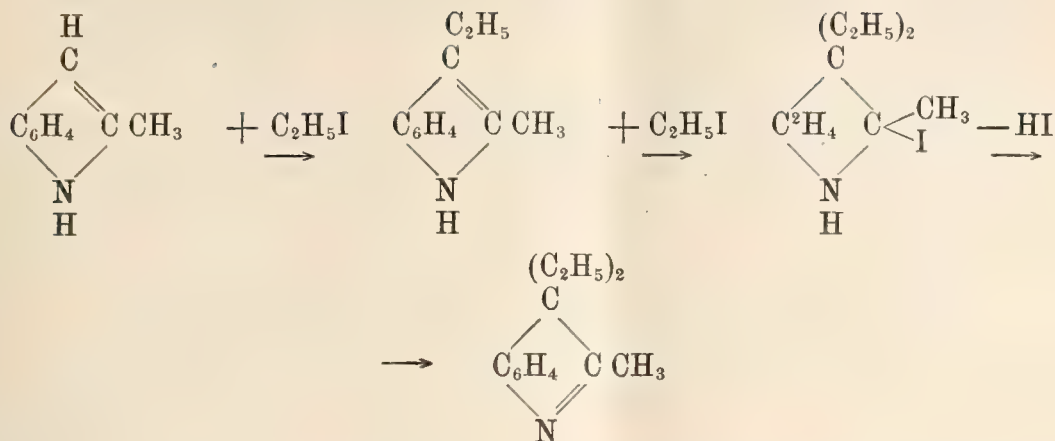
Per quelle del tipo della trimetildiidrochinolina

$$\begin{array}{c} (CH_3)_2 \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \\ C_6H_4 \quad C{=}CH_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ N \\ CH_3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} (CH_3)_2 \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \\ C_6H_4 \quad C{=}C{<}^{CH_3}_{CH_3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ N \\ CH_3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} (C_2H_5)_2 \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \\ C_6H_4 \quad C{=}CH_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ N \\ C_2H_5 \end{array} \quad \text{ecc.}$$

potremo sostituire al nome di diidrochinoline terziarie, fin qui usato, quello di *alchilenindoline.*

Tali nomi verranno usati in questa Nota e nelle altre che seguiranno, e per comodo di esposizione le indolenine saranno chiamate *pseudosecondarie* rispetto alle alchilenindoline che ne derivano.

Il passaggio dal metilchetolo alle indolenine può spiegarsi ammettendo che la reazione passi per le fasi rappresentate dal seguente schema, per il quale mi sono servito del caso speciale dell' azione del ioduro di etile in cui fu possibile isolare il maggior numero di prodotti intermedî.

$$\begin{array}{c} H \\ C \\ / \quad \backslash \\ C_6H_4 \quad C\,CH_3 \\ \backslash \quad / \\ N \\ H \end{array} \quad \underset{\longrightarrow}{+ C_2H_5I} \quad \begin{array}{c} C_2H_5 \\ C \\ / \quad \backslash \\ C_6H_4 \quad C\,CH_3 \\ \backslash \quad / \\ N \\ H \end{array} \quad \underset{\longrightarrow}{+ C_2H_5I} \quad \begin{array}{c} (C_2H_5)_2 \\ C \\ / \quad \backslash \\ C^2H_4 \quad C{<}^{CH_3}_{I} \\ \backslash \quad / \\ N \\ H \end{array} \quad \underset{\longrightarrow}{-HI}$$

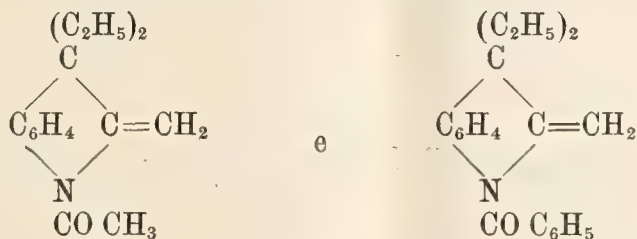
$$\longrightarrow \quad \begin{array}{c} (C_2H_5)_2 \\ C \\ / \quad \backslash \\ C_6H_4 \quad C\,CH_3 \\ \backslash \quad // \\ N \end{array}$$

Del passaggio dalle indolenine alle alchilenindoline fu detto più sopra quale debba ritenersi la spiegazione.

La questione però non è ancora completamente risolta. Essa è assai più complessa di quanto mostra di ritenerla il signor Brunner.

Gli argomenti da lui addotti contro la formola chinolinica sono infatti i più elementari e tali che non possono certamente essere sfuggiti a chi da lungo tempo si occupa di queste basi, ed il signor Brunner può essere certo che una delle formole da lui proposta era stata presa in considerazione in questo laboratorio da ben lungo tempo. Se essa non fu prima da me pubblicata, oltrechè per le ragioni suesposte, fu perchè esistono fatti che Brunner non può conoscere che in parte e dei quali essa non rende conto completamente, almeno in quanto non si conoscono ancora casi analoghi.

Questi fatti, alcuni dei quali non vennero resi noti fin qui, sono i seguenti.

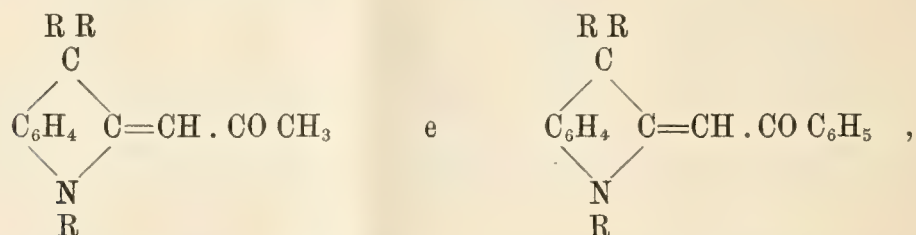
1) La dietilmetilindolenina dà un derivato acetilico non ben definito [1] e un benzoilderivato ben caratterizzato [2] ai quali dovrebbero corrispondere le formole

$$\begin{array}{c} (C_2H_5)_2 \\ C \\ / \quad \backslash \\ C_6H_4 \quad C{=}CH_2 \\ \backslash \quad / \\ N \\ CO\,CH_3 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} (C_2H_5)_2 \\ C \\ / \quad \backslash \\ C_6H_4 \quad C{=}CH_2 \\ \backslash \quad / \\ N \\ CO\,C_6H_5 \end{array}$$

in quanto che essi si saponificano facilmente con potassa alcoolica dando la base primitiva. Questi derivati al pari della base dalla quale derivano sono stabili al permanganato in soluzione alcoolica ed il derivato acetilico sopra

(1) Gazz. chim., 27 a. 398 e seg.
(2) Ibid., 27 a. 400.

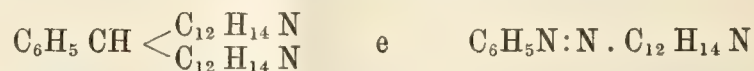
descritto può per riscaldamento essere trasformato in un c-acetilderivato che non viene alterato dalla potassa alcoolica, ma ridà la base primitiva se viene bollito con acido cloridrico.

Le metilenindoline dànno invece derivati acetilici e benzoilici ben studiati ai quali si dovrebbero dare le formole

```
    R R                                  R R
     C                                    C
    / \                                  / \
C6H4   C=CH . CO CH3        e        C6H4   C=CH . CO C6H5   ,
    \ /                                  \ /
     N                                    N
     R                                    R
```

perchè sono saponificati soltanto dall'acido cloridrico e non dalla potassa (1) e, come veri chetoni, dànno la condensazione con benzaldeide (2).

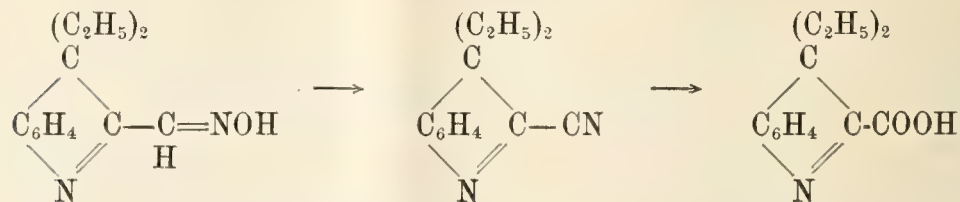
Anch'essi sono stabili al permanganato in soluzione alcoolica. Questo fatto, che non sembra compatibile con un doppio legame etilenico, non si verifica per le basi da cui derivano.

2) La trimetilmetilenindolina (= trimetildiidrochinolina) reagisce colla benzaldeide e col cloruro di diazobenzolo (3) e dà derivati

$$C_6H_5\,CH<^{C_{12}H_{14}N}_{C_{12}H_{14}N} \qquad e \qquad C_6H_5N:N\,.\,C_{12}H_{14}N$$

in tutto simili ai corrispondenti derivati che si ottengono dal metichetolo (4).

Questi fatti tenderebbero a fare ammettere nelle metilenindoline degli idrogeni aventi proprietà aromatiche, cosa non ben accordabile con quanto si conosce in proposito.

3) Ho osservato che la dietilmetilindolenina (dietildiidrochinolina) trattata con acido nitroso dà un'ossima fusibile a 169°, la quale si disidrata con anidride acetica e dà un nitrile dal quale per saponificazione si ottiene lo stesso acido $C_{13}H_{15}NO_2$ più sopra mentovato.

```
   (C2H5)2                   (C2H5)2                 (C2H5)2
     C                         C                       C
    / \           ——>         / \          ——>        / \
C6H4   C—C=NOH            C6H4   C—CN             C6H4   C-COOH
    \ //  H                   \ //                    \ //
     N                         N                       N
```

Da studî in corso risulterebbe lo stesso comportamento per la base $C_{11}H_{13}N$ ($\alpha\beta\beta$ - trimetilindolenina).

(1) Gazz. chim., 27 a, 412.

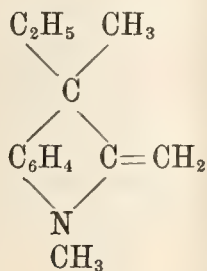
(2) Gazz. chim., 24 b, 300.

(3) Gazz. chim., 24 b, 194-195.

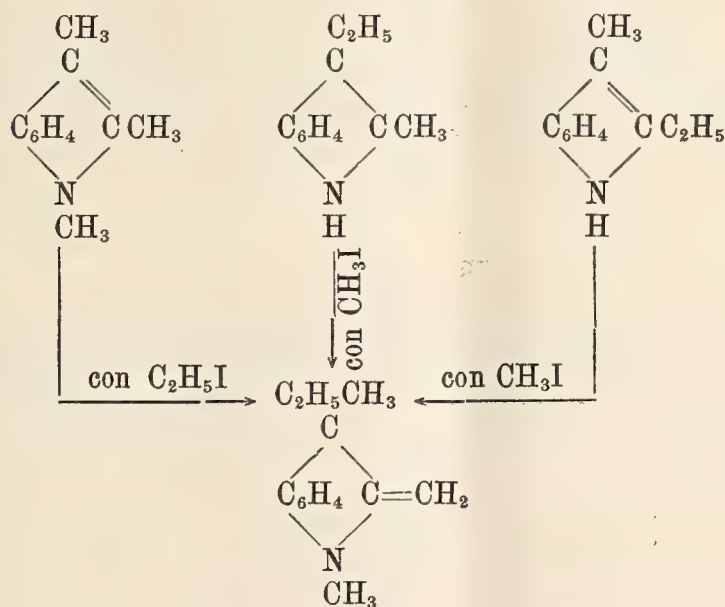
(4) E. Fischer, Ann. d. Ch., 242, 372; Ph. Vagner, ibid., 242, 383.

Tali passaggi provano sufficientemente la costituzione dell' ossima, ma la sua formazione non è spiegata molto meglio dalla formola ora proposta che dalla chinolinica.

4) Ho constatato che le basi che si formano per azione del ioduro di etile sul trimetilindolo [1] e del ioduro di metile sull' α metil β etilindolo, sono identiche a quella che si ottiene dal ioduro di metile sull' α etil β metilindolo, e che essa possiede la formola

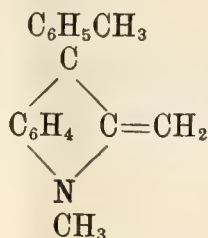
```
C2H5  CH3
   \  /
    C
   /  \
C6H4   C=CH2
   \  /
    N
    CH3
```

perchè ossidata dà un β-etil-β-metil-n-metilindolinone riconosciuto tale a mezzo del suo bibromoderivato.

Questo fatto che può riassumersi così:

```
    CH3                 C2H5                 CH3
     C                   C                    C
   /  \\               /  \                 /  \\
C6H4   C CH3       C6H4   C CH3         C6H4   C C2H5
   \  /                \  /                 \  /
    N                   N                    N
    CH3                 H                    H
    |                   |                    |
    |                   | con CH3I           |
    |   con C2H5I       v        con CH3I    |
    |_____________>  C2H5 CH3  <_____________|
                        C
                      /  \
                  C6H4   C=CH2
                      \  /
                       N
                       CH3
```

non è spiegabile, nè colle formole nuove, nè colle formole vecchie, bisognando in entrambi i casi ammettere il passaggio di un alchile.

[1] Ciamician e Boeris, Gazz. chim., 27 a, 83.

5) Facendo agire il ioduro di metile sull' α fenilindolo (1) si forma una base che deve essere così costituita:

$$
\begin{array}{ccc}
 & C_6H_5CH_3 & \\
 & C & \\
 / & & \backslash \\
C_6H_4 & & C{=}CH_2 \\
 \backslash & & / \\
 & N & \\
 & CH_3 &
\end{array}
$$

perchè si comporta come tutte le altre metilenindoline.

Anche qui bisogna ammettere la migrazione del gruppo fenilico.

Benchè altri fatti di questo genere siano stati osservati sia nel passaggio dal pinacone alla pinacolina (2), sia nella trasformazione del β fenilindolo, nel α-fenilindolo (3), e della base $(C_{10}H_{11}N)_3$ di Brunner nel dimetilindolo (4), restano tuttavia inspiegati.

Da quanto ho sin qui detto si vede che occorreranno nuove ricerche per mettere in chiaro queste reazioni, e perchè lo studio delle basi qui trattate possa dirsi esaurito.

Ed è da augurarsi che in avvenire il signor Brunner voglia tenere più conto del lungo lavoro da noi compiuto intorno a questo argomento. Egli può infatti ritenersi libero di estendere la sua reazione a quanti derivati più gli piaccia, ma lo studio della metilazione degli indoli e dei prodotti che in essa si formano, deve restare esclusivamente riservata al laboratorio di Bologna.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci e Corrispondenti Cossa A., Taramelli, Millosevich, Pincherle, e dei signori Amodeo, Battelli, Macchiati, Meli e Passerini.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

(1) Fischer e Steche, Ann. Chem., 242, 363.
(2) Fittig. Ann. der Chem., 114, 57.
(3) E. Fischer, Ber., 21, 1072.
(4) Monatshefte, 16, 851 e 17, 854.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La Società di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Sydney; il R. Istituto geologico di Stoccolma; il Museo di zoologia comparata di Cambridge Mass.; la Direzione della R. Scuola navale superiore di Genova; gli Osservatorî di Edinburgo e di San Fernando.

Annunciano l' invio delle proprie pubblicazioni:

Il R. Istituto di studî superiori di Firenze; la Società zoologica di Londra; la Società di scienze naturali di Osnabrück; la Società geologica di Darmstadt; l' Istituto geografico militare di Firenze.

COMITATO SEGRETO

La Classe, riunitasi in Comitato segreto, delibera di portare, temporaneamente, a sei il numero dei Soci nazionali nella sezione di Fisica, e di ridurre a due quello della sezione di Mineralogia e Cristallografia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell' 11 giugno 1898.

Amodeo F. — La prima data dell' Accademia reale di Napoli. Napoli, 1898. 8°.

Baggi V. — Trattato elementare completo di geometria pratica. Disp. 58. Torino, 1898. 8°.

Battelli A. — Effluvi elettrici unipolari nei gas rarefatti. Pisa, 1898. 8°.

Caruso F. — Nuovi rapporti tra i pesi atomici e specifici dei corpi indecomposti e le altre proprietà della materia. Palermo, 1897. 8°.

Cossa A. — Sulla presenza del tellurio nei prodotti del cratere dell' Isola Vulcano (Lipari). Torino, 1898. 8°.

Crepas E. — Gli studi di matematiche pure. Milano, 1898. 8°.

Gallardo A. — Algunos casos de teratologia vegetal, fasciación, proliferación y sinantia. Buenos Aires, 1898. 8°.

Guelbaum D. — The Law of hydraulic Obstruction in Closed Streams. S. l. e a. 8°.

Macchiati L. — Sui pretesi granuli d' amido incapsulati dei tegumenti seminali della *Vicia narbonensis* L. Modena, 1898. 8°.

Meli R. — Appunti di Storia Naturale sul Viterbese. Roma, 1898. 8°.

Id. — Sopra alcuni denti fossili di Mammiferi (*ungulati*) rinvenuti nelle ghiaie alluvionali dei dintorni di Roma. Roma, 1897. 8°.

Meli R. — Sulla *Eastonia rugosa* Chemn. (*Mactra*) ritrovata vivente e fossile nel littorale di Anzio e Nettuno. Modena, 1897. 8°.

Id. — Un minerale nuovo per i dintorni di Roma. Siena, 1898. 8°.

Millosevich E. — Discussione delle osservazioni astronomiche fatte dal tenente di Vascello Lamberto Vannutelli. Roma, 1898. 8°.

Occella F. — Questioni di massimo e di minimo dipendenti da equazioni di secondo grado. Casale, 1898. 8°.

Pasquini E. — Sopra la doppia rifrazione dei raggi di forza elettrica nei cristalli. Pisa, 1898. 8°.

Passerini N. — Esperienze sopra la consociazione del frumento. Firenze, 1898. 8°.

Id. — Esperienze sulla coltivazione del tabacco istituite a Bettolle in Valdichiana negli anni 1895-1896. Firenze, 1898. 8°.

Id. — Esperienze sul potere assorbente delle lettiere per il carbonato ammonico. Modena, 1897. 8°.

Id. — Sopra la Sorghina e la sorgorubina. Firenze, 1897. 8°.

Pincherle S. — Sull'operazione aggiunta. Bologna, 1898. 8°.

Saija G. — Le projezioni per sezione nella cartografia. Roma, 1898. 8°.

Supplemento annuale alla Enciclopedia di chimica scientifica e industriale. Disp. 157-160. Torino, 1897-98. 8°.

Taramelli T. — Osservazioni geologiche in occasione del traforo delle Gallerie del Turchino e di Cremolino sulla linea Genova-Asti. Roma. S. a. 4°.

Wölfer A. — Astronomische Mittheilungen. N. 89. Zürich, 1898. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 giugno 1898.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Intorno ad alcune reazioni di fluoruri metallici.* Nota I del Socio E. Paternò e di U. Alvisi.

Uno di noi già molti anni indietro, a proposito dello studio dei composti organici fluorurati, aveva accennato che l'acido fluoridrico poteva venir facilmente spostato dal suo sale d'argento da acidi anche organici e relativamente deboli, quali il carbonico, il cianidrico, l'acetico (Gazz. chim., T. XI, p. 90, 1881).

Berthelot e Guntz (C. R., t. 98, p. 395 e p. 463, 1894) hanno in seguito studiato dal punto di vista termico queste ed altre reazioni analoghe di reciproco spostamento tra l'acido fluoridrico ed altri acidi.

In questi ultimi tempi abbiamo ripreso con indirizzo sperimentale più largo queste esperienze e, quantunque il nostro lavoro sia appena iniziato, vogliamo rendere conto di taluno dei risultati ottenuti.

1. *Azione dell'acido ossalico sopra alcuni fluoruri metallici.*

Da molte esperienze, di cui citiamo ad esempio qualcheduna, risulta in generale che gli ossalati metallici poco solubili o insolubili nell'acqua sono nelle soluzioni acide per acido fluoridrico assai meno solubili di quello che sieno nelle soluzioni acide per acido cloridrico o nitrico o solforico, sperimen-

tando in identiche condizioni di temperatura e con quantità uguali di soluzioni acquose, contenenti quantità equivalenti degli acidi stessi.

Così, se ad una soluzione di fluoruro ramico molto acida per acido fluoridrico, si aggiunga una soluzione acquosa di acido ossalico si ottiene un precipitato bianco fine, che ritiene con molta persistenza l'acqua igroscopica, e che, disseccato sull'acido solforico, diede all'analisi i seguenti risultati;

Gr. 0,625 di sostanza diedero dopo calcinazione gr. 0,309 di Cu O.

Gr. 0,901, polverizzati e sospesi nell'acido solforico diluito e caldo, consumarono c.c. 112,7 di permanganato potassico $^{n}/_{10}$, quindi in 100 p.

	trovato	
Cu =	39,40	$= C^2O^4 = 55.03$.

risultati che conducono alla formola di Lowe: $2\,Cu\,C^2\,O^4 + H^2O$.

Salvo il caso di soluzioni assai concentrate di acido fluoridrico, il rame rimasto in soluzione è solo in tracce. Oltre che con l'ossalato di rame, che è poco solubile nell'acido cloridrico diluito e ancor meno nell'acido solforico diluito, si sperimentò con l'ossalato manganoso. È noto che le soluzioni rispettivamente acide del cloruro, nitrato o solfato manganoso non precipitano con le soluzioni acquose di acido ossalico. Invece, trattando con una soluzione di acido ossalico una soluzione di fluoruro manganoso anche molto acida, relativamente parlando, per acido fluoridrico, il liquido colorasi in rosso-viola; riscaldando ed agitando la soluzione, il colore scompare e si forma un precipitato bianco granuloso della composizione $Mn\,C^2\,O^4 . 2H^2\,O$. Infatti:

Gr. 0,6103 di sostanza lasciarono dopo calcinazione gr. 0,26 di $Mn^3\,O^4$ e
Gr. 0,5463 di sostanza consumarono c.c. 60,91 di permanganato $^{n}/_{10}$, quindi in 100 p.

	trovato	calcolato per $Mn\,C^2\,O^4\,2H^2\,O$
Mn	30,69	30,73
$= C^2\,O^4$	49,05	49,16.

Si ottiene quindi lo stesso ossalato che si forma trattando una soluzione acquosa di solfato manganoso con acido ossalico, mentre dal carbonato e dal cloruro Souchay e Leussen ebbero il sale $Mn\,C^2O^4 . 5H^2O$. In quanto alla tinta viola che compare nella prima fase della reazione, basta rammentare che la soluzione di 1 p. di solfato manganoso in 30 p. d'acqua dà con la soluzione d'acido ossalico una colorazione violacea, che si attribuisce al sale $Mn\,C^2\,O^4 . 3H^2\,O$.

La precipitazione del manganese nelle condizioni suaccennate non è completa, però ne restano in soluzione piccole quantità, e paragonando fra loro soluzioni contenenti quantità equimolecolari di cloruro e di fluoruro manganoso e quantità equivalenti rispettivamente di acido cloridrico e fluoridrico,

quando le soluzioni cloridriche non precipitano affatto con acido ossalico quelle fluoridriche corrispondenti dànno dei precipitati abbondanti.

Più evidente è il fenomeno con i sali mercurici. È noto che una soluzione anche neutra di cloruro mercurico non precipita affatto con una soluzione di acido ossalico libero.

Invece, aggiungendo ad una soluzione molto acida per acido floridrico di fluoruro mercurico una soluzione acquosa satura a freddo di acido ossalico, si ottiene subito un precipitato bianco, che, come quello di rame e di manganese, ritiene con persistenza l'acqua igroscopica e che è ossalato mercurico $Hg\,C^2\,O^4$. Infatti gr. 0,9954 di sostanza consumarono c.c. 69,05 di permanganato potassico $^n/_{10}$, quindi in 100 p.

	trovato	calcolato per $Hg\,C^2\,O^4$
$= C^2\,O^4$	30,52	30,55

Molto più interessante, in ispecie dal punto di vista analitico, è il comportamento de' floruri metallici artificiali e naturali in presenza delle soluzioni acquose di acido ossalico. Da una serie di esperienze numerose, delle quali qui citiamo soltanto qualcheduna come esempio, risulta che riscaldando a b. m. per un tempo più o meno lungo un fluoruro metallico artificiale (e in tal caso l'attacco è naturalmente più rapido) o naturale, ridotto in polvere fine, con una soluzione acquosa concentrata di acido ossalico in eccesso, si riesce a scacciare completamente l'acido fluoridrico e a trasformare quindi il fluoruro in ossalato. La reazione è tanto più rapida quanto più la soluzione di acido ossalico è concentrata e il fluoruro è meccanicamente diviso.

10 grammi di fluorina, di cui ci offrì un bel campione in cristalli il prof. Meli, polverizzati e passati al setaccio a 5000 maglie per cm.q., si trattarono come sopra è detto. Dopo circa due giorni di riscaldamento il miscuglio conteneva già il 59,5 $^0/_0$ di ossalato di calcio (considerato come anidro); dopo circa 5 giorni la reazione era finita e nel miscuglio non c'erano più traccie di fluore. La reazione accade anche se, invece di un eccesso di acido ossalico, se ne adoperi la quantità corrispondente al rapporto $Ca\,Fl^2$ per $H^2\,C^2\,O^4 . 2H^2\,O$, ma con maggior lentezza e rimane incompleta, anche perchè nel riscaldamento un poco di acido ossalico vien decomponendosi di per sè.

Gr. 2 di fluoruro di magnesio, preparato artificialmente e secco, si riscaldarono a b. m. per circa 50 ore con gr. 4,06 di acido ossalico in soluzione acquosa (secondo il rapporto $Mg\,Fl^2$ per $H^2\,C^2\,O^4 . 2H^2\,O$); dopo qualche tempo si aggiunse altro acido ossalico per affrettare la reazione. Dopo filtrazione e lavaggio del miscuglio la soluzione conteneva piccole quantità di sale di magnesio e il residuo era formato di ossalato $Mg\,C^2\,O^4 . 2H^2\,O$ senza più traccie di fluore. Infatti:

Gr. 0,3 di sale consumarono c.c. 40,4 di permanganato $^n/_{10}$ quindi in 100 p.

	trovato	calcolato per $Mg\,C^2\,O^4 . 2H^2\,O$
$= C^2\,O^4$	59,25	59,45

Della cerite di Nya-Bastuäs (Schweden) venne disgregata a fusione con carbonato potassico. Raccolti gli ossidi dopo lisciviamento con acqua vennero trasformati in fluoruri. Gli ossidi constavano principalmente di Cerio e Lantanio con discrete quantità di ferro e di calcio e piccole quantità di altri metalli rari così esigue da non poterne determinar la natura.

Il miscuglio dei fluoruri seccato a 100° si trattò con eccesso di soluzione di acido ossalico a b. m. Si svolse acido fluoridrico e dopo 26 ore di riscaldamento il residuo conteneva già il 30 °/₀ di acido ossalico (considerato anidro). Dopo tre giorni il residuo insolubile nell' acqua non conteneva più traccie di fluore e constava essenzialmente di ossalati. Anche il fluoruro d' Yttrio ed il fluoruro di Torio, da noi preparati artificialmente ed essiccati a 100°, si decomposero facilmente per azione dell' acido ossalico e si ottennero gli ossalati corrispondenti, privi affatto di fluore.

Anzi queste reazioni ebbero da uno di noi un' applicazione pratica nell' analisi delle reticelle incandescenti Auer di già bruciate. A tale scopo gli ossidi vennero trasformati in fluoruri; questi in ossalati per l'azione, come è già descritta, delle soluzioni acquose di acido ossalico. La trasformazione di fluoruri in ossalati accade con evidente incremento di volume e, come pare da ricerche del dott. Clerici, senza che la forma della fibra vegetale nelle trasformazioni da ossidi a fluoruri ad ossalati venga alterata. L' avere questi metalli rari sotto la forma di ossalati è molto vantaggioso sia perchè con acido nitrico concentrato si possono facilmente trasformare in nitrati ciò che industrialmente è pratico, sia per la facilità di dosamento volumetrico col permanganato potassico, sia qualche volta per facilità di separazioni. Ora accenniamo soltanto a questa questione riserbandoci di tornare con particolari sull' applicazione delle reazioni descritte all' analisi qualitativa e quantitativa de' metalli, in specie di quelli comunemente denominati rari.

2°. *Azione dell' acido tartarico sulla fluorina.*

Anche l'acido tartarico in soluzione acquosa concentrata e per riscaldamento a b. m. decompone parecchi fluoruri, sebbene in modo notevolmente più lento di quello che faccia l' acido ossalico.

Gr. 1,67 di fluorina si fecero reagire con gr. 3,21 di acido tartarico (nel rapporto di una molecola di fluoruro di calcio per una di acido). Incominciò presto a caldo lo sviluppo di acido fluoridrico; per affrettarlo si aggiunse altro acido tartarico. Dopo 30 ore di riscaldamento solo gr. 0,30 di fluorina erano stati attaccati e la soluzione conteneva del sale di calcio. Dopo circa 70 ore la fluorina rimasta inattaccata era di gr. 0,71 circa. Rinnovando l' azione per un tempo molto più lungo si riuscì ad eliminare completamente l' acido fluoridrico.

3°. *Azione dell' acido solforoso sui fluoruri ramico e mercurico.*

Se ad una soluzione di fluoruro ramico, molto acida per acido fluoridrico, si aggiunge una soluzione acquosa di anidride solforosa, lentamente a freddo e più presto a caldo, il liquido diventa verde cupo, intorbida e depone minuti cristallini rosso-rubino. La precipitazione del rame è incompleta; la polvere cristallina rossa è il sale di Chevreul. Infatti gr. 0,3111 di sostanza diedero gr. 0,1910 di Cu O, quindi in 100 p.

	trovato	calcolato per $Cu^2 SO^3 . Cu SO^3 . 2H^2O$
Cu	48,95	49,09

Mutando le condizioni, cioè disciogliendo in una soluzione acquosa di acido solforoso il fluoruro ramico, si forma lo stesso sale: infatti gr. 0,44 di sostanza diedero gr. 0,2710 di CuO, quindi in 100 p.

	trovato	calcolato per $Cu^2 SO^3 . Cu SO^3 . 2H^2O$
Cu	49,11	49,09

Così pure facendo passare una corrente di anidride solforosa sul fluoruro ramico sospeso nell' acqua esso disciogliesi bene, il liquido riscaldasi da sè e in meno di un' ora si depone il sale di Chevreul. Infatti

gr. 0,3552 di sostanza così preparata diedero gr. 0,2175 di Cu O, quindi in 100 p.

	trovato	calcolato per $Cu^2 SO^3 . Cu SO^3 . 2H^2O$
Cu	48,81	49,09

Dopo la precipitazione del sale di Chevreul, le soluzioni contengono sempre del solfato di rame. La reazione procede quindi come la descrisse A. Étard (C. R. t. 93, p. 725, 1881) tra l' acido solforoso e l' acetato di rame. Anche in questo caso il comportamento dell' acido fluoridrico è paragonabile dal punto di vista dell' energia a quello dell' acido acetico, così la solubilità degli ossalati nelle soluzioni acide per acido acetico somiglia a quella degli ossalati nelle soluzioni acide per acido fluoridrico, così le soluzioni molto acide per acido fluoridrico di fluoruro di cobalto (come quelle acetiche di acetato) precipitano benissimo con nitrito potassico.

Quando ad una soluzione di fluoruro mercurico molto acida per acido fluoridrico si aggiunge una soluzione di acido solforoso, secondo le quantità messe a reagire e la temperatura, si ottiene o un precipitato bianco (che contiene acido solforoso e solforico e mercurio pare allo stato mercuroso e mercurico) o un precipitato giallo o del mercurio metallico o dei miscugli dell' uno con l' altro. La reazione un po' complessa forma attualmente oggetto delle nostre ricerche.

4.° *Comportamento delle soluzioni acide di fluoruro d'argento.*

Aggiungiamo per ora come complemento qualche nota sul comportamento del fluoruro d'argento. Esso fu preparato disciogliendo in un eccesso di acido fluoridico l'ossido umido e filtrando dal residuo. La soluzione *molto acida* (e in tutte le reazioni si ebbe cura che tale restasse) precipita con tutti quei corpi con i quali non precipitano le soluzioni d'argento anche debolmente acide per acido nitrico, e cioè dà precipitato con soluzioni di arseniato, cromato e nitrito potassico (meno intensamente con arseniato potassico) e inoltre bene con acido cloroplatinico e con soluzione di acido solforoso libero.

Matematica. — *Le trasformazioni infinitesime dei gruppi cremoniani tipici dello spazio.* Nota di Gino Fano, presentata dal Socio V. Cerruti.

Nella mia Nota: *Sopra alcuni gruppi continui imprimitivi di trasformazioni puntuali dello spazio* [1] ho mostrato come alcuni dei gruppi tipici da me incontrati nella classificazione dei gruppi continui imprimitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio, si siano presentati anche al sig. Lie nelle sue ricerche sui gruppi imprimitivi di trasformazioni puntuali [2]; e per questi gruppi ho ivi trascritti i simboli delle trasformazioni infinitesime, determinati dallo stesso sig. Lie. Ma anche per gli altri gruppi cremoniani tipici si possono facilmente trovare i simboli delle trasformazioni infinitesime generatrici, deducendoli, nella maggior parte dei casi, dalle equazioni finite dei gruppi stessi. E questo appunto io mi propongo di fare nella presente Nota.

Nella Memoria del sig. Enriques e mia: *I gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio* [3] è dimostrato che ogni gruppo continuo di tali trasformazioni può ridursi birazionalmente a un gruppo di una delle categorie seguenti:

a) *gruppi proiettivi*;

b) *gruppi di trasformazioni conformi* (ossia che mutano le sfere in sfere);

c) gruppi che abbiamo chiamati « *di Jonquières generalizzati* », ossia che trasformano in sè stesso un fascio di piani, ovvero una stella di rette;

d) due gruppi ∞^3, semplici, transitivi, ben determinati, composti di trasformazioni del 3° o rispett. del 7° ordine.

(1) Questi Rendiconti, pag. 302.

(2) *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, cap. 8.

(3) Annali di Matematica, s. 2ª, t. 26 (1897).

Corrispondentemente a ciascuno dei casi *a*), *b*) esiste un unico gruppo *completo*, rispett. ∞^{15} e ∞^{10}, nel quale tutti gli altri gruppi rispett. proiettivi e conformi sono contenuti; vale a dire:

Il gruppo di tutte le trasformazioni proiettive, generato dalle 15 trasformazioni infinitesime (1):

$$\begin{gathered} p\ ,\ q\ ,\ r\ , \\ xp\ ,\ xq\ ,\ xr\ ,\ yp\ ,\ yq\ ,\ yr\ ,\ zp\ ,\ zq\ ,\ zr\ , \\ x(xp+yq+zr)\ ,\ y(xp+yq+zr)\ ,\ z(xp+yq+zr)\,; \end{gathered} \tag{1}$$

e il gruppo di tutte le trasformazioni conformi, generato dalle 10 trasformazioni infinitesime (2):

$$\begin{gathered} p\ ,\ q\ ,\ r\ ,\ xq-yp\ ,\ yr-zq\ ,\ zp-xr \\ xp+yq+zr\ (\equiv \mathrm{U}) \\ 2x\mathrm{U}-(x^2+y^2+z^2)p\ ;\ 2y\mathrm{U}-(x^2+y^2+z^2)q\ ;\ 2z\mathrm{U}-(x^2+y^2+z^2)r\,. \end{gathered} \tag{2}$$

I gruppi di Jonquières generalizzati sono stati ricondotti in una mia recente Memoria (3) a *dodici* tipi diversi di gruppi *completi* (non contenuti cioè in altri più ampî, nè riducibili a tali). Fra questi tipi, i primi tre hanno a comune la proprietà di trasformare in sè un fascio di piani e una stella di rette i cui sostegni (asse e centro) non si appartengono, e i tre successivi trasformano in sè una stella di rette, e un sistema lineare di superficie di un certo ordine n aventi nel centro di questa stella un punto $(n-1)^{\text{plo}}$ e uno stesso cono tangente (di ordine $n-1$).

Enumeriamo ora tutti questi gruppi (completi), aggiungendo per ciascuno di essi i simboli delle trasformazioni infinitesime generatrici:

1°. *Gruppo* ∞^{11} *delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^5 *di quadriche (paraboloidi iperbolici):*

$$z(ax+by)+cx+dy+ez+f=0\,.$$

Abbiamo già veduto nella mia Nota ultima che questo gruppo è rappresentato dalle equazioni finite:

$$x'=\frac{ax+by+c}{a_2x+b_2y+c_2}\ ;\ y'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\ ;\ z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

(dove $[a\,b_1\,c_2]=\alpha\delta-\beta\gamma=1$), e viene generato dalle 11 trasformazioni infinitesime:

$$p\ ,\ q\ ,\ xp\ ,\ xq\ ,\ yp\ ,\ yq\ ,\ x(xp+yq)\ ,\ y(xp+yq)\ ,\ r\ ,\ zr\ ,\ z^2r.$$

2°. *Gruppo* ∞^9 *delle trasformazioni cubiche che mutano in sè stesso ciascuno di tre diversi fasci di piani* ($x=$ cost. , $y=$ cost. , $z=$ cost.) *e quindi il sistema lineare* ∞^7 *di superficie del 3° ordine, somma di questi tre fasci:*

$$axyz+byz+czx+dxy+ex+fy+gz+h=0\,.$$

(1) *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, pag. 124.

(2) Op. e vol. cit., pag. 137.

(3) *I gruppi di Jonquières generalizzati*, attualmente in corso di stampa nelle Memorie dell'Accademia di Torino (vol. 48).

Questo gruppo, rappresentato dalle equazioni:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} \; ; \; y' = \frac{a_2 y + b_2}{c_2 y + d_2} \; ; \; z' = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3}$$

(dove $a_i d_i - b_i c_i = 1$), può evidentemente generarsi colle trasformazioni infinitesime:

$$[4] \qquad p \; , \; xp \; , \; x^2 p \; ; \; q \; , \; yq \; , \; y^2 q \; ; \; r \; , \; zr \; , \; z^2 r .$$

3°. *Gruppo* ∞^{n+7} *delle trasformazioni di ordine* n *che mutano in sè stesso il sistema lineare di superficie:*

$$ay + f_{n-1}(x) + byz + z \, . \, \varphi_{n-1}(x) = 0$$

dove f_{n-1} e φ_{n-1} sono simboli di polinomi affatto arbitrari di grado $n-1$ in x. Questo gruppo è rappresentato dalle equazioni:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} \; ; \; y' = \frac{\lambda y + \psi_{n-1}(x)}{(c_1 x + d_1)^{n-1}} \; ; \; z' = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

(dove $a_1 d_1 - b_1 c_1 = a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1$). E di qui si trae facilmente ch'esso può generarsi colle $n + 7$ trasformazioni infinitesime:

$$[5] \qquad \begin{array}{c} p \; , \; xp \; , \; x^2 p + (n-1)\, xyq \\ yq \; , \; q \; , \; xq \; , \; x^2 q \; , \; \ldots \; x^{n-1} q \\ r \; , \; zr \; , \; z^2 r . \end{array}$$

Ciascuno di questi tre gruppi trasforma in sè il fascio di piani $z = \text{cost.}$ e la stella di rette $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$

Veniamo ora ai tre tipi (4°, 5°, 6°) che lasciano invariata una stella di rette — che supporremo ancora essere quella delle rette parallele all'asse z —, e un sistema lineare di monoidi aventi nel centro (improprio) di questa stella uno stesso cono tangente (qui ridotto al piano all'infinito contato un numero opportuno di volte):

4°. *Gruppo dipendente da* $\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 9$ *parametri, che trasforma in sè il sistema lineare di superficie, di dimensione* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$:

$$z = \mathrm{F}_n(x \, , y)$$

dove F_n è un polinomio arbitrario di grado n in x, y. Alle equazioni finite di questo gruppo:

$$x' = \frac{ax + by + c}{a_2 x + b_2 y + c_2} \; ; \; y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \; ; \; z' = \frac{z + \Phi_n(x \, , y)}{(a_2 x + b_2 y + c_2)^n}$$

abbiamo già veduto nella mia Nota ultima che corrispondono le trasformazioni infinitesime:

$$[6] \qquad \begin{array}{c} p \, , \, q \, , \, xq \, , \, xp - yq \, , \, yp \, , \, xp + yq \, , \, x(xp + yq + nzr) \, , \, y(xp + yq + nzr) \\ zr \; , \; x^{\varrho} y^{\sigma} r \quad (\varrho + \sigma = 0 \, , 1 \, , 2 \ldots n) . \end{array}$$

5°. *Gruppo dipendente da* $(m+1)(n+1) + 7$ *parametri, che trasforma in sè il sistema lineare di superficie, di dimensione* $(m+1)(n+1)$:

$$z = x^m f_0(y) + x^{m-1} f_1(y) + \cdots + f_m(y)$$

dove le f sono polinomi di grado n in y. Questo gruppo è rappresentato dalle equazioni:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}\ ;\ y' = \frac{a_2 x + b_2}{c_2 x + d_2}\ ;\ z' = \frac{\lambda z + x^m \varphi_0(y) + x^{m-1}\varphi_1(y) + \cdots + \varphi_m(y)}{(c_1 x + d_1)^m (c_2 x + d_2)^n}$$

dove $a_1 d_1 - b_1 c_1 = a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1$, e le φ sono ancora polinomi qualunque di grado n in y. E di qui si trae facilmente che il gruppo stesso può generarsi colle $(m+1)(n+1)+7$ trasformazioni infinitesime:

$$[7] \qquad \begin{array}{c} p\ ,\ xp\ ,\ x(xp + mzr)\ ;\ q\ ,\ yq\ ,\ y(yq + nzr)\ ; \\ zr\ ,\ x^\varrho y^\sigma r \quad \begin{cases} \varrho = 0, 1, 2, \dots m \\ \sigma = 0, 1, 2, \dots n \end{cases}. \end{array}$$

6°. *Gruppo dipendente da* $m\binom{n+1}{2} + (n+1)(l+1) + m + 6$ *parametri, che trasforma in sè il sistema lineare di superficie, di dimensione* $m\binom{n+1}{2} + (n+1)(l+1)$:

$$z = y^n f_l(x) + y^{n-1} f_{l+m}(x) + \cdots + f_{l+mn}(x)$$

dove le f sono polinomi in x di gradi eguali ai rispettivi indici. Le equazioni di questo gruppo sono:

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}\ ;\ y' = \frac{\lambda y + F_m(x)}{(cx + d)^m}\ ;\ z' = \frac{\mu z + y^n \varphi_l(x) + \cdots + \varphi_{l+mn}(x)}{(cx + d)^{l+mn}}$$

dove $ad - bc = 1$, e F_m e le φ sono ancora polinomi in x, di gradi eguali ai rispettivi indici. Di qui si deducono le trasformazioni infinitesime:

$$[8] \qquad \begin{array}{c} p\ ,\ xp\ ,\ x[xp + myq + (l + mn)zr] \\ yq\ ,\ q\ ,\ xq\ ,\ x^2 q\ , \dots x^m q \\ zr\ ,\ x^\varrho y^\sigma r \quad \begin{cases} \sigma = 0, 1, 2, \dots n \\ \varrho = 0, 1, 2, \dots (n - \sigma) m + l\ . \end{cases} \end{array}$$

E continuando nell'enumerazione:

7°. *Gruppo* ∞^{2n+9} *delle trasformazioni di ordine* n *che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^{n+2} *di cilindri* (colle generatrici parallele al piano xy):

$$\lambda x + \mu y + f_n(z) = 0\ .$$

Questo gruppo (già incontrato nell'ultima mia Nota) è rappresentato dalle equazioni:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\ ;\ x' = \frac{ax + by + \varphi_n(z)}{(\gamma z + \delta)^n}\ ;\ y' = \frac{cx + dy + \psi_n(z)}{(\gamma z + \delta)^n}$$

(essendo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$); e contiene le $2n + 9$ trasformazioni infinitesime:

$$[9] \qquad \begin{array}{c} xp\ ,\ xq\ ,\ yp\ ,\ yq\ ,\ r\ ,\ zr\ ,\ z^2 r + nz(xp + yq) \\ p\ ,\ zp\ ,\ z^2 p\ , \dots z^n p \\ q\ ,\ zq\ ,\ z^2 q\ , \dots z^n q\ . \end{array}$$

8°. *Gruppo* ∞^7 *delle trasformazioni di ordine* $m + n - 1$ *che*

mutano in sè stesso il sistema lineare ∞^{m+n+1} *delle superficie d'ordine* $m+n-1$:

$$\varphi_m(x\,,y)+x^{m-1}\,\varphi_n(z)=0$$

dove φ_m è un polinomio *omogeneo* di grado m nelle $x\,,y$, e φ_n è un polinomio arbitrario di grado n in z. Questo gruppo è rappresentato dalle equazioni:

$$x'=\frac{(ax+by)^m}{x^{m-1}(\gamma z+\delta)^n}\;;\;y'=\frac{(ax+by)^{m-1}\,(cx+dy)}{x^{m-1}(\gamma z+\delta)^n}\;;\;z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

nelle quali sono parametri omogenei le potenze m^{esime} delle $a\,,b\,,c\,,d$ e le potenze n^{esime} delle $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\delta$; sicchè, in un'operazione generica, si può supporre uno dei parametri, ad es. δ, eguale all'unità.

Ponendo $a=d=\delta=1$, $b=c=0$, e facendo variare $\alpha\,,\beta\,,\gamma$, si hanno ∞^3 operazioni che risultano generate dalle trasformazioni infinitesime:

$$r\;,\;zr\;,\;z^2r+nz(xp+yq)\,.$$

Ponendo invece $\alpha=\delta=1$, $\beta=\gamma=b=0$, e facendo variare le $a\,,c\,,d$, si hanno altre ∞^3 operazioni, generabili colle trasformazioni infinitesime:

$$xp\;,\;xq\;,\;yq\,.$$

E infine ponendo $a=d=\alpha=\delta=1$, $\beta=\gamma=c=0$, rimane il gruppo ∞^1:

$$x'=\frac{(x+by)^m}{x^{m-1}}\;;\;y'=y\,\frac{(x+by)^{m-1}}{x^{m-1}}\;;\;z'=z$$

dalle cui equazioni si ricava:

$$\frac{dx'}{db}=my'\;;\;\frac{dy'}{db}=(m-1)\,\frac{y'^2}{x'}$$

sicchè la trasformazione infinitesima che genera quest'ultimo gruppo avrà per simbolo:

$$myp+(m-1)\,\frac{y^2}{x}\,q\,.$$

E l'intero gruppo ∞^7 sarà perciò generato dalle trasformazioni infinitesime:

[10] $\quad r\,,\,zr\,,\,z^2r+nz(xp+yq)\,,\,xp\,,\,xq\,,\,yq\,,\,myp+(m-1)\,\dfrac{y^2}{x}\,q\,.$

9°. *Gruppo dipendente da* $m\binom{n+1}{2}-n+m+5$ *parametri, che trasforma in sè stesso il sistema lineare di superficie, di dimensione* $m\binom{n+1}{2}+1$:

$$x\{y^{n-1}\varphi_{m-1}+y^{n-2}\varphi_{2m-1}+\cdots+\varphi_{mn-1}\}=(\alpha x+1)z+a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_n$$

dove le φ sono polinomi arbitrari in x, di gradi eguali ai rispettivi indici, α è un ulteriore parametro, e le a_i sono coefficienti costanti. Questo gruppo risulta dalla moltiplicazione delle schiere seguenti (le quali sono anzi altrettanti gruppi, fatta eccezione per la [C]):

[A] $\;x'=x\,;\,y'=y\,;\,z'=z+x\,\{y^{n-1}\xi_{m-2}(x)+y^{n-2}\xi_{2m-2}(x)+\cdots+\xi_{mn-2}(x)\}$

generata dalle trasformazioni infinitesime:

$$x^\varrho y^\sigma r \qquad \begin{cases} \sigma = 0\,,1\,,2\,,\dots n-1 \\ \varrho = 1\,,2\,,\dots\dots (n-\sigma)m-1 \end{cases}$$

in numero di $m\binom{n+1}{2}-n$. Poi:

$$[\mathrm{B}] \qquad x' = x \;;\; y' = y + x\,.\,\eta_{m-1}(x) \;;\; z' = z$$

generata dalle trasformazioni infinitesime:

$$xq \;,\; x^2q\,,\dots x^mq$$

in numero di m. Poi ancora la schiera:

$$[\mathrm{C}] \qquad x' = \frac{ax}{cx+d} \;;\; y' = \frac{y+k}{(cx+d)^m}\,;$$

$$z' = \frac{1}{d(cx+d)^{mn-1}}\left\{ z + a_0y^n + \cdots + a_n - [a_0(y+k)^n + a_1d^m(y+k)^{n-1} + \cdots] \right\}$$

la quale può generarsi colle trasformazioni infinitesime:

$$\begin{gathered} xp \;;\; x\{xp + myq + (mn-1)zr\}\,; \\ yq + \{nz + a_1y^{n-1} + 2a_2y^{n-2} + \cdots + na_n\}r\,; \\ q - \{na_0y^{n-1} + (n-1)a_1y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\}r\,. \end{gathered}$$

E infine il gruppo ∞^1:

$$[\mathrm{D}] \quad x' = x + b \;;\; y' = y \;;\; z' = \frac{x+b}{x}z + \frac{b}{x}(a_0y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_n)$$

generato dalla trasformazione infinitesima:

$$p + \frac{z + a_0y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_n}{x}r\,.$$

Sicchè, riassumendo, il gruppo complessivo risulterà generato dalle $m\binom{n+1}{2} - n + m + 5$ trasformazioni infinitesime:

$$[11] \qquad \begin{gathered} x^\varrho y^\sigma r \;;\; [0 \leq \sigma \leq n-1 \;;\; 1 \leq \varrho \leq (n-\sigma)m-1] \\ xp \;;\; xq\,, x^2q\,,\dots x^mq \;;\; x\{xp + myq + (mn-1)zr\}\,; \\ yq + \{nz + a_1y^{n-1} + 2a_2y^{n-2} + \cdots + na_n\}r\,; \\ q - \{na_0y^{n-1} + (n-1)\,a_1y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\}\,; \\ p + \frac{z + a_0y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_n}{x}r\,. \end{gathered}$$

10°. *Gruppo intransitivo ∞^3 delle trasformazioni di ordine n che mutano in sè stesso ogni piano $z =$ cost., e il sistema lineare ∞^{n+2} di superficie di ordine n:*

$$y\{\alpha x + \beta y + \varphi_{n-1}(z)\} = x^2 + xf_{n-1}(z) + f_n(z)$$

dove i coefficienti di $f_{n-1}(z)$ e $f_n(z)$ si suppongono costanti, e variabili invece tutti quelli di $\varphi_{n-1}(z)$ [1]. Questo gruppo ∞^3 risulta dalla moltiplicazione

[1] Quest' equazione è ottenuta da quella data al n. 15 della mia Memoria: *I gruppi di Jonquières generalizzati,* facendo coincidere gli $n-2$ piani tangenti $f_{n-2}(x_1x_2) = 0$ col piano $x_3 = 0$, e passando poi a coordinare cartesiane non omogenee

$$x = \frac{x_4}{x_3}\,,\quad y = \frac{x_3}{x_2}\,,\quad z = \frac{x_1}{x_2}\,.$$

del gruppo proiettivo ∞^2:

$$x' = x + by \ ; \ y' = ay \ ; \ z' = z$$

generato dalle trasformazioni infinitesime yp, yq, per il gruppo ∞^1:

$$x' = x + c\frac{x^2 + xf_{n-1} + f_n}{y} \ ; \ y' = y + c(2x + f_{n-1}) + c^2\frac{x^2 + xf_{n-1} + f_n}{y} \ ; z' = z\text{(1)}$$

Da queste equazioni si trae facilmente che:

$$\frac{x'^2 + x'f_{n-1} + f_n}{y'} = \frac{x^2 + xf_{n-1} + f_n}{y} .$$

E quindi:

$$\frac{dx'}{dc} = \frac{x^2 + xf_{n-1} + f_n}{y} = \frac{x'^2 + x'f_{n-1} + f_n}{y'} ;$$

$$\frac{dy'}{dc} = 2x + f_{n-1} + 2c\frac{x^2 + xf_{n-1} + f_n}{y} = 2x' + f_{n-1} .$$

Sicchè l'ultimo gruppo ∞^1 risulta generato dalla trasformazione infinitesima:

$$\frac{x^2 + xf_{n-1} + f_n}{y} p + (2x + f_{n-1})\, q$$

e l'intero gruppo ∞^3 dalle tre trasformazioni:

$$[12] \qquad yp \ , \ yq \ , \ \frac{x^2 + xf_{n-1} + f_n}{y} p + (2x + f_{n-1})\, q .$$

11°. *Gruppo ∞^8 delle trasformazioni cubiche che mutano in sè stesso il sistema lineare ∞^7 di superficie del 3° ordine* (2):

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y)(y - xz) + (\alpha_2 x + \beta_2 y) z + \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma z + \delta = 0 .$$

Questo gruppo è rappresentato dalle equazioni:

$$x' = \frac{ax + by + c}{a_2 x + b_2 y + c_2} \ ; \ y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \ ; \ z' = \frac{\mathrm{A}z - \mathrm{B} + \mathrm{C}(y - xz)}{-\mathrm{A}_1 z + \mathrm{B}_1 - \mathrm{C}_1(y - xz)}$$

dove le lettere maiuscole indicano i subdeterminanti del determinante $[ab_1c_2]$ (che può supporsi $= 1$); e viene generato dalle trasformazioni infinitesime:

$$[13] \qquad p \ , \ q \ , \ xq + r \ , \ xp - yq - 2zr \ , \ yp - z^2 r \ , \ xp + yq$$
$$x^2 p + xyq + (y - xz)\, r \ , \ xyp + y^2 q + z(y - xz)\, r .$$

12°. *Gruppo tipico ∞^3, semplice, transitivo, corrispondente al caso diedrico di un dato ordine $2n$* ($n \geq 3$). Questo gruppo è equivalente al gruppo delle ∞^3 trasformazioni proiettive sulla varietà delle corde di una C^n

(1) Queste equazioni si ricavano da quelle date al n. 15 della mia Mem. cit., ponendovi $a = d = 1$, $b = 0$; e quelle del precedente gruppo ∞^2 si ottengono ponendo $c = 0$ (e scrivendo a, b in luogo rispett. di a^2, ab).

(2) Al gruppo incontrato al n. 28 della mia Memoria: *I gruppi di Jonquières generalizzati*, sostituiamo quest'altro, ad esso equivalente, secondo quanto è detto al n. 3 dell'ultima mia Nota di questi Rendiconti.

(razionale, normale) di S_n; e di qui conviene prender le mosse per trovarne le trasformazioni infinitesime.

Ricordiamo perciò che il gruppo proiettivo ∞^3 di uno spazio S_n rispetto al quale è invariante la curva (razionale, normale):

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & x_1 & x_2 \ldots\ldots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 \ldots\ldots & x_n \end{array} \right\| = 0$$

contiene le tre trasformazioni infinitesime (¹):

$$p_1 + 2x_1 p_2 + \cdots + n x_{n-1} p_n$$
$$x_1 p_1 + 2x_2 p_2 + \cdots + n x_n p_n$$
$$(n-1)x_2 p_1 + (n-2)x_3 p_2 + \cdots + x_n p_{n-1} - n x_1(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n).$$

Per ricavare di qui le trasformazioni infinitesime del gruppo ∞^3 subordinato sulla varietà M_3 delle corde della C^n, le cui equazioni, risolute rispetto a $x_4, x_5, \ldots x_n$, si trovano nella mia Memoria: *I gruppi di Jonquières generalizzati* (n. 34), basta sopprimere nei simboli testè scritti i termini contenenti le $p_4, p_5, \ldots p_n$, e, nei termini che rimangono, sostituire a $x_4, x_5, \ldots$ le loro espressioni mediante x_1, x_2, x_3 date da quelle stesse equazioni (²). Ora l'unica sostituzione che qui rimane a farsi è quella di x_4 nel termine $(n-3)x_4 p_3$ del terzo simbolo; introducendo pertanto in luogo della x_4 stessa la sua espressione:

$$x_4 = \frac{x_3^2 + x_2^3 - 2x_1 x_2 x_3}{x_2 - x_1^2}$$

e adottando per comodità le solite notazioni x, y, z, p, q, r, avremo i tre simboli:

$$[14] \qquad p + 2xq + 3yr \quad , \quad xp + 2yq + 3zr$$
$$(n-1)yp + (n-2)zq + (n-3)\frac{z^2 + y^3 - 2xyz}{y - x^2} r - nx(xp + yq + zr)$$

e queste stesse saranno altresì le trasformazioni infinitesime del nostro gruppo cremoniano di S_3, il quale si otteneva dal gruppo proiettivo ∞^3 sulla varietà delle corde della C^n mediante una proiezione (univoca) dallo spazio (S_{n-4}) all'infinito di $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Lo stesso ragionamento permette altresì di trovare le trasformazioni infinitesime dei gruppi tipici corrispondenti al caso *d*) dell'accennata classificazione del sig. Enriques e mia, ossia dei gruppi ∞^3 semplici, transitivi, del tipo *ottaedrico* e *icosaedrico* (Mem. cit., §§ 26, 27). Questi due gruppi sono equivalenti a gruppi proiettivi sopra varietà M_3 appartenenti rispett. a uno spazio S_6 o S_{12} e invarianti rispetto al gruppo proiettivo ∞^3 con una C_6 o C_{12} fissa. Dobbiamo dunque supporre rispett. $n = 6$ e $n = 12$; e l'espressione

(¹) *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, pag. 187.
(²) Op. cit., vol. I, pag. 233-34.

da sostituirsi a x_4 è in ambo i casi (cfr. l. cit.) la seguente: $4x_1 x_3 - 3x_2^2$. Nel caso ottaedrico avremo perciò le trasformazioni infinitesime:

$$[15] \qquad p + 2xq + 3yr \quad , \quad xp + 2yq + 3zr$$
$$5yp + 4zq + 3(4xz - 3y^2)r - 6x(xp + yq + zr) ;$$

e nel caso icosaedrico:

$$[16] \qquad p + 2xq + 3yr \quad , \quad yp + 2yq + 3zr$$
$$11yp + 10zq + 9(4xz - 3y^2)r - 12x(xp + yq + zr) .$$

Il sottogruppo ∞^2 generato dalle prime due trasformazioni infinitesime è sempre un gruppo proiettivo (con una cubica fissa, e un punto fisso sopra questa cubica).

Concludiamo pertanto: *Ogni gruppo continuo di trasformazioni cremoniane dello spazio è riducibile birazionalmente a uno dei gruppi* [1] ... [16] *dei quali in questa Nota sono assegnate le trasformazioni infinitesime, ovvero a un sottogruppo di uno di essi.*

Matematica. — *Un teorema relativo agli invarianti delle sostituzioni di un gruppo Kleiniano.* Nota del dott. G. Bagnera, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

1. È noto ed è facile verificare che, data una sostituzione

$$T = \left(z , \frac{az + b}{cz + d}\right) ,$$

dove a, b, c, d sono numeri reali od immaginarî che soddisfano alla condizione

$$ad - bc = 1 ,$$

la somma $a + d$ è la stessa per tutte le trasformate di T mediante altre sostituzioni della stessa natura.

Ciò giustifica il nome d'*invariante* della sostituzione T dato alla detta somma; invariante, che io voglio qui brevemente denotare col simbolo [T].

Se Γ è un gruppo, che contiene un numero infinito di tali sostituzioni, generato però da n sostituzioni fondamentali

$$A , B , ... , L ,$$

ad esempio, se Γ è un gruppo Kleiniano, il sig. H. Poincarè, in un suo lavoro (¹), ha dimostrato che gl'invarianti di tutte le sostituzioni di Γ sono

(¹) *Les fonctions Fuchsiennes et l'Arithmétique.* Journal de mathématiques pures et appliquées, 1887.

funzioni razionali intere di un numero finito d'invarianti fondamentali, i quali si ottengono da

$$[A^\alpha B^\beta \dots L^\lambda]$$

attribuendo agli esponenti $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ i valori 0 ed 1 in tutte le maniere possibili.

Gl'invarianti fondamentali, quando è $n > 2$, non sono algebricamente indipendenti e, convenendo di chiamare *ordine* di un tale invariante il numero delle sostituzioni fondamentali che entrano nella sua espressione, io voglio qui dimostrare il seguente teorema:

Un invariante d'ordine $r > 2$ *è radice di una equazione algebrica, i cui coefficienti sono funzioni razionali intere degli invarianti fondamentali di 1º e 2º ordine e che è risolubile mediante estrazioni di radici quadrate.*

2. Denoti T una sostituzione qualunque di un gruppo Γ: essa è una combinazione di un numero finito di sostituzioni fondamentali e delle loro inverse; ma, data T, pensando alla proprietà associativa delle operazioni del gruppo Γ e, se questo è un gruppo Kleiniano, anche alle relazioni che esprimono la discontinuità propria del detto gruppo, si possono immaginare infinite altre di tali combinazioni che riproducono la sostituzione T.

Relativamente a questo fatto, si conviene di chiamare *esponente* di T, rispetto ad un sistema di sostituzioni fondamentali già fissato, il minimo numero delle sostituzioni del detto sistema, dirette od inverse, eguali o diseguali, che occorrono per formare T.

È chiaro che le sostituzioni di un gruppo Γ, generato da un numero finito di sostituzioni fondamentali, costituiscono un insieme numerabile. Infatti, ripetendo l'osservazione che ha servito al sig. G. Cantor per dimostrare la stessa proprietà pei numeri algebrici, tutte le sostituzioni di Γ, che hanno un dato esponente μ, sono evidentemente in numero finito e perciò si possono ordinare. Allora, facendo successivamente $\mu = 0, 1, 2, \dots$, io posso scrivere prima la sostituzione identica, poi le sostituzioni che hanno l'esponente 1 nell'ordine stabilito, poi le sostituzioni che hanno l'esponente 2 nell'ordine stabilito, e così di seguito.

3. Ciò posto, sia TA^p una sostituzione di Γ che abbia come esponente quello di T aumentato del valore assoluto dell'intero p. Per qualunque valore positivo o negativo di p, si ha

$$[TA^p] = [TA]\, P_1 + [T]\, P_2 \tag{1}$$

dove P_1 e P_2 sono due polinomî rispetto ad $[A]$.

Infatti, se T_1 e T_2 sono due arbitrarie sostituzioni di Γ, si può facilmente verificare l'identità

$$[T_2\, T_1^{-1}] = [T_2]\,[T_1] - [T_1\, T_2]\,; \tag{2}$$

donde, cambiando T_2 e T_1 rispettivamente in TA^{p-1} ed A, si trae l'equazione ricorrente (1)

$$[TA^p] = [TA^{p-1}][A] - [TA^{p-2}], \tag{3}$$

la quale dimostra la (1) quando è $p > 0$.

Nel caso in cui è $p < 0$, si conclude egualmente scrivendo la (3) nel seguente modo:

$$[TA^{p-2}] = [TA^{p-1}][A] - [TA^p] \cdot$$

Per il calcolo effettivo di $[TA^p]$ è utile conoscere le espressioni dei polinomî P_1 e P_2.

Se ϱ_1 e ϱ_2 sono i moltiplicatori della sostituzione A, cioè a dire le radici dell' equazione di secondo grado

$$\varrho^2 - [A]\varrho - 1 = 0,$$

si soddisfa alla (3) ponendo

$$[TA^p] = h\varrho_1{}^p + k\varrho_2{}^p$$

dove h e k sono due numeri indipendenti da p, che debbono essere determinati in modo che sia

$$[TA] = h\varrho_1 + k\varrho_2\ ,\ [T] = h + k.$$

Si ottiene così la relazione

$$[TA^p] = [TA]\frac{\varrho_1{}^p - \varrho_2{}^p}{\varrho_1 - \varrho_2} - [T]\frac{\varrho_1{}^{p-1} - \varrho_2{}^{p-1}}{\varrho_1 - \varrho_2}; \tag{4}$$

quindi, se è $p > 0$, un calcolo facile mostra che è

$$P_1 = \frac{1}{2^{p-1}}\left\{\binom{p}{1}[A]^{p-1} + \binom{p}{3}[A]^{p-3}\left([A]^2-4\right) + \binom{p}{5}[A]^{p-5}\left([A]^2-4\right)^2 + \cdots\right\}$$

ed il polinomio P_2 si ottiene cambiando di segno l' espressione di P_1 dopo avere scritto $p-1$ al posto di p.

Nel caso in cui è $p < 0$, tenendo presente la (4) e che è $\varrho_1\varrho_2 = 1$, si vede che i polinomî P_1 e P_2 si cambiano rispettivamente nei polinomî P_2 e P_1 relativi all' espressione di $[TA^{-p+1}]$.

La formola (1) mostra che l' invariante della sostituzione TA^p si esprime linearmente mediante l' invariante della sostituzione T e quello della sostituzione TA, dove la sostituzione fondamentale A, che figura come ultimo fattore, ha l' esponente eguale ad 1.

4. L' esponente μ della sostituzione

$$T_1 A^p B^q T_2$$

(1) Vedi Poincaré, l. cit.

sia la somma degli esponenti delle sostituzioni T_1 e T_2 aumentata della somma dei valori assoluti degli interi p e q, che io suppongo entrambi diversi da zero.

Voglio ora dimostrare che, se le sostituzioni T_1 e T_2 non coincidono contemporaneamente con la sostituzione identica, la somma

$$[T_1 A^p B^q T_2] + [T_1 B^q A^p T_2]$$

si esprime mediante una funzione intera e razionale d'invarianti, che hanno l'esponente minore di μ.

Si osservi anzitutto che, qualunque siano le sostituzioni T_1 e T_2, si ha identicamente

$$[T_1 T_2] = [T_2 T_1]$$

perchè la sostituzione $T_2 T_1$ si può anche scrivere $T_1^{-1}(T_1 T_2) T_1$.

Ciò posto, applicando successivamente la (2), si hanno le formole

$$[(T_2 T_1 A^{-p})(B^q)^{-1}] = [T_2 T_1 A^{-p}][B^q] - [T_2 T_1 A^{-p} B^q],$$
$$[(T_2 T_1)(A^p)^{-1}] = [T_2 T_1][A^p] - [T_2 T_1 A^p],$$
$$[T_2 T_1 A^{-p} B^q] = [(B^q T_2 T_1)(A^p)^{-1}] = [B^q T_2 T_1][A^p] - [B^q T_2 T_1 A^p]$$

dalle quali si deduce

$$[T_2 T_1 A^{-p} B^{-q}] =$$
$$= [T_2 T_1 A^p B^q] - [T_1 A^p T_2][B^q] - [T_1 B^q T_2][A^p] + [T_1 T_2][A^p][B^q];$$

poi, applicando nuovamente la stessa trasformazione, si trova

$$[(T_2 T_1)(B^q A^p)^{-1}] = [T_2 T_1][B^q A^p] - [T_2 T_1 B^q A^p].$$

Giacchè i primi membri delle due relazioni precedenti sono eguali, tenendo presente l'osservazione premessa, risulta la formola

$$(5) \qquad [T_1 A^p B^q T_2] + [T_1 B^q A^p T_2] =$$
$$= [T_1 A^p T_2][B^q] + [T_1 B^q T_2][A^p] - [T_1 T_2]\Big([A^p][B^q] - [A^p B^q]\Big)$$

la quale dimostra la mia asserzione.

Dunque l'invariante della sostituzione $T_1 A^p B^q T_2$ si esprime mediante l'invariante della sostituzione $T_1 B^q A^p T_2$, che differisce dalla prima per lo scambio di due fattori consecutivi, e gl'invarianti di altre sostituzioni, che hanno esponenti inferiori a μ.

5. Dal momento che il numero delle sostituzioni che hanno l'esponente inferiore a μ è finito, è chiaro che, applicando un numero finito di volte il risultato precedente, si giunge ad esprimere l'invariante di una sostituzione qualunque di Γ mediante invarianti di sostituzioni tali che, in ognuna di esse, le sostituzioni fondamentali che vi figurano, si presentino ciascuna una sola volta ed in un ordine prestabilito.

Quindi si può ritenere che l'invariante di ogni sostituzione di Γ sia una funzione razionale intera d'invarianti del tipo

$$[A^\alpha B^\beta \dots L^\lambda] \tag{6}$$

dove $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sono numeri interi arbitrarî.

Ora, se nell'invariante (6) figura una sostituzione fondamentale A con l'esponente $\alpha \neq 1$, io posso permutare circolarmente i diversi fattori che figurano nell'invariante (6), il che non altera il detto invariante, in modo da portare in ultimo posto A^α; poi, applicando la formola (1), riduco l'esponente α all'unità.

Si viene così a stabilire il risultato di cui ho discorso precedentemente del sig. Poincaré; ma il procedimento che io ho seguito, oltre che conduce al risultato generale in modo diretto, mette in rilievo il fatto importante che segue.

Quando si esprime l'invariante di una sostituzione qualunque di Γ mediante gl'invarianti fondamentali, il massimo ordine degli invarianti fondamentali, che si presentano, non supera evidentemente il numero delle sostituzioni fondamentali distinte che figurano nella sostituzione data; dippiù, le formole (1) e (5) mostrano che la detta espressione risulta *lineare* rispetto agli invarianti di ordine non inferiore a 3.

6. Ciò posto, dato un invariante fondamentale

$$[AB \dots H]$$

d'ordine $r > 2$, si può subito verificare l'identità

$$[(AB \dots H)^2] = [AB \dots H]^2 - 2 .$$

D'altra parte, scrivendo l'invariante del primo membro sotto la forma

$$[AB \dots H \; AB \dots H]$$

e riducendo con le formole (5) e (1), si vede facilmente che esso si esprime con una funzione lineare intera dell'invariante $[AB \dots H]$, che ha per coefficienti funzioni razionali intere di invarianti fondamentali d'ordine inferiore ad r.

Paragonando le due espressioni ottenute si ha un'equazione del tipo

$$[AB \dots H]^2 + [AB \dots H] \, \Phi + \Psi = 0$$

dove Φ e Ψ sono funzioni intere e razionali d'invarianti fondamentali di ordine inferiore ad r.

Dunque, aggiungendo al campo di razionalità i valori degli invarianti fondamentali il cui ordine non supera $r - 1$, ogni invariante d'ordine r si ottiene mediante una estrazione di radice quadrata. Poi, se $r - 1$ supera 2, aggiungendo al campo di razionalità soltanto i valori degli invarianti fon-

damentali il cui ordine non supera $r-2$, ogni invariante fondamentale di ordine $r-1$ si ottiene mediante una estrazione di radice quadrata. Così proseguendo si conclude che, aggiungendo al campo di razionalità soltanto gli invarianti di 1° e 2° ordine, ogni invariante fondamentale, il cui ordine supera 2, è radice di una equazione algebrica risolubile con estrazioni di radici quadrate; ed è bene notare che in una tale equazione il coefficiente del termine di grado più elevato è sempre l'unità.

7. Per esempio, ponendo

$$[A] = u_1 \; , \; [B] = u_2 \; , \; [C] = u_3 \; ,$$
$$[BC] = v_1 \; , \; [CA] = v_2 \; , \; [AB] = v_3 \; ,$$

e chiamando w l'invariante fondamentale del 3° ordine $[ABC]$, si ha:

$$[(ABC)^2] = w^2 - 2 ;$$

poi, applicando la formola (5) all'invariante

$$[A(BC)(AB)C] ,$$

si trova subito

$$[(ABC)^2] = -[A^2B^2C^2] + [A^2BC]\, v_1 + [AB^2C]\, v_2 + [ABC^2]\, v_3 - v_1v_2v_3 ;$$

dopo ciò, riducendo gli esponenti all'unità si ottiene

$$[(ABC)^2] = (v_1u_2u_3 + v_2u_3u_1 + v_3u_1u_2 - v_1v_2v_3) +$$
$$+ w(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) - (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2) .$$

Confrontando le due espressioni di $[(ABC)^2]$ si giunge all'equazione (¹)

$$w^2 - w(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) - (v_1u_2u_3 + v_2u_3u_1 + v_3u_1u_2 - v_1v_2v_3) +$$
$$+ (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 4) = 0 .$$

Quando si scambia ad es. A con B, l'invariante u_1 si scambia con u_2 e l'invariante v_1 con v_2, mentre u_3 e v_3 restano inalterati. Dunque, facendo tale scambio, non si alterano i coefficienti della precedente equazione e perciò, se una radice della detta equazione è

$$[ABC] = [BCA] = [CAB] ,$$

l'altra radice è

$$[BAC] = [ACB] = [CBA] .$$

Che cosa accade in generale? Ecco una questione che merita di essere studiata.

8. Io termino osservando che gl'invarianti fondamentali di 1° e 2° ordine non sono, in generale, algebricamente indipendenti tra loro. Ognuna delle n sostituzioni fondamentali del gruppo Γ dipende da 3 parametri; mentre gli invarianti fondamentali di 1° e 2° ordine sono in numero di $\frac{1}{2}n(n+1)$.

(¹) Cfr Poincaré, l. cit.

Quindi, se n supera 5, tra i detti invarianti passano necessariamente $\frac{1}{2}n(n-5)$ relazioni algebriche.

Ma di tali relazioni potrebbero esservene un maggiore numero nel caso che Γ sia un gruppo Kleiniano; giacchè allora i $3n$ parametri, da cui dipendono le sostituzioni fondamentali del detto gruppo, debbono, in generale, soddisfare a certe equazioni, non necessariamente algebriche, che intervengono quando si cerca di esprimere la discontinuità propria di Γ.

Fisica matematica. — *Sulla temperatura di un conduttore lineare bimetallico.* Nota I di Paolo Straneo, presentata dal Socio Blaserna.

Per la parte della termodinamica che considera i fenomeni termoelettrici designati coi nomi dei loro scopritori Peltier e Thomson è di somma importanza conoscere la temperatura di un conduttore bimetallico percorso da una corrente. I fenomeni termoelettrici di Peltier e Thomson sono infatti riversibili e si può quindi loro applicare il secondo principio della termodinamica; ma per far questo rigorosamente è necessario di dedurre lo stato termico del conduttore tenendo conto di tutti i fenomeni di trasporto di calore prodotti dalle conducibilità termiche dei metalli componenti il circuito. Solo dopo aver stabilito con tutta l' esattezza necessaria l' equazione esprimente la temperatura di ogni punto del conduttore, sarà possibile di dedurre un metodo di misura sicuro per determinare i coefficienti dei detti fenomeni termoelettrici, di eseguire per essi la verifica dei principî della termodinamica, come già si fece per gran parte degli altri fenomeni termici e finalmente di tentare la soluzione del problema delle relazioni fra i poteri conduttori termici ed elettrici, e gli effetti termoelettrici nei metalli.

Scopo della presente Nota e di alcune altre che si pubblicheranno nei prossimi Rendiconti è appunto la deduzione dello stato termico di un conduttore lineare bimetallico percorso da una corrente costante, dei fenomeni che si producono coll' inversioue della corrente e delle relative conseguenze.

Per non complicare troppo il problema supporremo le estremità del conduttore e l' aria ambiente mantenuta ad una temperatura costante che assumeremo come zero; questa supposizione, come la più facile da realizzare fisicamente ci faciliterà le applicazioni della teoria.

Deduzione dell' equazione differenziale. — Poniamo nell' asse di un conduttore lineare composto di due fili metallici di lunghezza l_1 ed l_2 l' asse delle ascisse. Indichiamo rispettivamente con x_1 ed x_2 le ascisse della prima e della seconda parte del filo, ponendo l' origine delle x_1 nell' estremità del primo filo e l' origine delle x_2 nel punto di contatto dei due fili. Siano rispettivamente k_1, h_1, c_1, ϱ_1, ω_1, σ_1 e k_2, h_2, c_2, ϱ_2, ω_2, σ_2 i coefficienti delle con-

ducibilità termiche interna ed esterna, del calore specifico, delle densità, della resistenza elettrica e dell' effetto Thomson dei due fili; sia inoltre P il coefficiente dell' effetto Peltier al contatto dei due metalli. Ammettiamo, come è esperimentalmente dimostrato, che lo sviluppo del calore prodotto da questi due fenomeni termoelettrici sia proporzionale alla corrente i. Indichiamo con u_1 la temperatura del primo filo e con u_2 quella del secondo.

Immaginiamo completamente nel primo conduttore due sezioni corrispondenti alle ascisse x_1 ed $x_1 + dx_1$. Avremo allora da considerare nell' elemento così formato durante il tempo dt i seguenti fenomeni: 1° Un flusso di calore diretto verso l'interno causato dalla conducilità termica interna attraverso la sezione x_1. Esso sarà eguale a $-k_1 q \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dt$, in cui q indica la sezione comune dei due fili; 2° Un flusso di calore diretto all' esterno attraverso la sezione $x_1 + dx_1$ espresso dalla quantità:

$$\left(k_1 + \frac{\partial k_1}{\partial x_1} dx_1\right) \quad q\left(-\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} dx_1\right) dt\,;$$

3° Un' emissione di calore attraverso la superficie in contatto coll' aria ambiente; sia p il perimetro comune ai due fili; il calore emesso sarà uguale a

$$p\left(h_1 + \frac{\partial h_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{2} + \cdots\right)\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{2} + \cdots\right) dx_1\, dt\,;$$

4° Uno sviluppo di calore prodotto dalla corrente, detto effetto di Joule, uguale ad $\frac{i^2 \omega_1}{\mathrm{J} q} dx_1\, dt$, indicando con J l' equivalente meccanico del calore; 5° Un secondo sviluppo di calore prodotto dalla corrente, detto effetto Thomson, uguale ad

$$i\left(\sigma_1 + \frac{d\sigma_1}{dx_1} dx_1 + \cdots\right)\left(\frac{du_1}{dx_1} + \frac{d^2 u_1}{dx_1^2}\frac{dx_1}{2} + \cdots\right) dx_1\, dt\,;$$

in questa espressione si è pure ammesso come dato esperimentale che l'effetto Thomson sia proporzionale alla caduta della temperatura dell' elemento di conduttore considerato. Tutto questo movimento e produzione di calore apporta una variazione nella quantità di calore dell' elemento uguale a:

$$q\varrho_1\left(c_1 + \frac{dc_1}{dx_1}\frac{dx_1}{2} + \cdots\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \,.\, \partial x_1}\frac{dx_1}{2} + \cdots\right) dx_1\, dt\,.$$

Uguagliando i termini infinitesimi del secondo ordine e trascurando gli altri di ordine superiore, si avrà l' equazione differenziale:

$$qk_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1} + q\frac{\partial k_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - ph_1 u_1 + i\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{i^2 \omega_1}{\mathrm{J} q} = q\varrho_1 c_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad .$$

ossia

$$(I) \qquad q\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+i\sigma_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-ph_1u_1+\frac{i^2\omega}{Jq}=q\varrho_1c_1\frac{\partial x_1}{\partial t}.$$

Le quantità k, h, ω, σ e c sono funzioni della temperatura; praticamente si considerano o costanti o funzioni lineari della temperatura; converrebbe però fare eccezione per la conducibilità esterna h, che si scosta sensibilmente dalla forma lineare; però, siccome nelle applicazioni dei metodi di misura si cerca sempre di rendere piccolissime le perdite di calore per conducibilità esterna, noi potremo assumere anche per h una forma lineare senza errore sensibile. Noi assumeremo dunque:

$$k=k_0(1+\alpha u)\,,\quad h=h_0(1+\beta u)\,,\quad \omega=\omega_0(1+\delta u)$$
$$\sigma=\sigma_0(1+\varepsilon u)\quad \text{e}\quad c=c_0(1+\eta u)\,.$$

L'equazione differenziale (I) si trasformerà allora nella seguente:

$$(II) \quad qh_{10}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+qk_{10}\frac{\alpha_1}{2}\frac{\partial^2(u_1^2)}{\partial x_1^2}+i\sigma_{10}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+i\sigma_{10}\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{\partial(u_1^2)}{\partial x_1}-ph_{10}(u+\beta_1u_1^2)$$
$$+\frac{i^2\omega_{10}}{Jq}+\frac{i^2\omega_{10}}{Jq}\delta_1u_1=q\varrho_1c_{10}\frac{\partial u_1}{\partial t}+q\varrho_1c_{10}\frac{\eta_1}{2}\frac{\partial(u_1^2)}{\partial t}\,.$$

L'equazione per la seconda parte del conduttore si otterrà evidentemente mutando nell'equazione precedente l'indice 1 nell'indice 2.

Le soluzioni u_1 ed u_2 dovranno evidentemente soddisfare alle condizioni seguenti: 1) per $x_1=0\,,u_1=0$ per ogni t; 2) per $x_2=l_2\,,u_2=0$ per ogni t. Nel contatto poi dei due conduttori si avrà: u_1 per $x_1=l_1$ uguale a u_2 per $x_2=0$ in ogni t; noi converremo di scrivere questa condizione nella formula: 3) $(u_1)_{l_1}=(u_2)_0$.

Consideriamo ora nel contatto dei due fili il flusso di calore ed il fenomeno di Peltier che vi si produce. Per quanto abbiamo precedentemente detto avremo ancora la condizione:

$$4) \quad \left[k_{10}(1+\alpha_1u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right]_{l_1}-\left[k_{20}(1+\alpha_2u_2)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right]_0=\mathrm{P}\frac{i}{q}\,.$$

Finalmente per le condizioni supposte per le estremità e per l'aria ambiente avremo l'ultima condizione: 5) per $t=0$ $u_1=u_2=0$ per ogni x_1 ed x_2.

Deduzione dello stato stazionario della temperatura. — La temperatura del conduttore considerato tenderà col crescere del tempo ad uno stato stazionario. Le equazioni di esso si deducono dalle precedenti ponendo uguali a zero le derivate della temperatura per rapporto al tempo. La presente Nota si limiterà appunto alla determinazione di questo stato di regime U_1 ed U_2.

Si dovrà evidentemente soddisfare al seguente sistema di equazioni differenziali:

per il primo filo:

$$(\mathrm{III}_1) \quad \frac{d^2 U_1}{dx_1^2} + 2j_1 \frac{dU_1}{dx_1} - (m_1^2 - n_1\delta_1)\, U_1 + n_1 = -\frac{\alpha_1}{2}\frac{d^2(U_1^2)}{dx_1^2} - j_1\,\varepsilon_1 \frac{d(U_1^2)}{dx_1} + m_1^2 \beta_1 U_1^2 ,$$

per il secondo filo:

$$(\mathrm{III}_2) \quad \frac{d^2 U_2}{dx_2} + 2j_2 \frac{dU_2}{dx_2} - (m_2^2 - n_2\delta_2)\, U_2 + n_2 = -\frac{\alpha_2}{2}\frac{d^2(U_2^2)}{dx_2^2} - j_2\,\varepsilon_2 \frac{d(U_2^2)}{dx_2} + m_2^2 \beta_2 U_2^2 .$$

ove per abbreviare si pose:

$$2j_1 = \frac{i\sigma_{10}}{qk_{10}}, \quad 2j_2 = \frac{i\sigma_{20}}{qk_{20}};$$

$$m_1^2 = \frac{ph_{10}}{qk_{10}}, \quad m_2^2 = \frac{ph_{20}}{qk_{20}};$$

$$n_1 = \frac{i^2\omega_{10}}{Jq^2k_{10}}, \quad n_2 = \frac{i^2\omega_{20}}{Jq^2k_{20}}.$$

Si dovranno inoltre soddisfare alle condizioni:

$$(1_1) \qquad \text{per } x_1 = 0 \quad U_1 = 0 \qquad \text{per } x_2 = l_2 \quad U_2 = 0 \qquad (1_2)$$

$$(2) \qquad (U_1)_{l_1} = (U_2)_0$$

$$(3) \qquad P\frac{i}{q} = \left\{k_{10}(1 + \alpha_1 U_1)\frac{dU_1}{dx_1}\right\}_{l_1} - \left\{k_{20}(1 + \alpha_2 U_2)\frac{dU_2}{dx_2}\right\}_0 .$$

Le equazioni (III_1) e (III_2) si possono risolvere per successive approssimazioni. Avuto riguardo alle grandezze dei coefficienti $\alpha_1, \beta_1, \varepsilon_1$ ed $\alpha_2, \beta_2, \varepsilon_2$, tutti assai piccoli, converrà procedere nella seguente maniera. Si determinerà dapprima la soluzione completa dell'equazione differenziale nota:

$$(5) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + 2a\frac{dy}{dx} - by + c = 0 .$$

In essa si farà: $2a = 2j_1$, $b = m_1^2 - n_1\delta_1$, $c = n_1$ e si avrà così una prima soluzione approssimata della (III_1) contenente due costanti arbitrarie. Analogamente si farà nella soluzione della (5) $2a = 2j_2$, $b = m_2^2 - n_2\delta_2$, $c = n_2$ e si avrà la prima soluzione approssimata della (III_2) contenente pure due costanti arbitrarie. Le quali, unitamente alle precedenti si determineranno facendo uso delle condizioni (1_1), (1_2), (2) e (3).

Siano U_1' e U_2' queste soluzioni. Risolviamo i sistemi di equazioni successive:

$$\frac{d^2 U_1''}{dx_1^2} + 2j_1 \frac{dU_1''}{dx_1} - (m_1^2 - n_1\delta_1) U_1''$$
$$= \frac{\alpha_1}{2} \frac{d^2(U_1'^2)}{dx_1^2} - j_1\varepsilon_1 \frac{d(U_1'^2)}{dx_1} + m_1^2 \beta_1 U_1'^2 - n_1 .$$

$$\frac{d^2 U_1'''}{dx_1^2} + 2j_1 \frac{dU'''}{dx_1} - (m_1^2 - n_1\delta_1) U_1'''$$
$$= \frac{\alpha_1}{2} \frac{d^2(U_1''^2)}{dx_1^2} - j_1\varepsilon_1 \frac{d(U_1''^2)}{dx_1} + m_1^2 \beta_1 U_1''^2 - n_1 .$$

. . . .

. . . .

$$\frac{d^2 U_2''}{dx_2} + 2j_2 \frac{dU_2''}{dx_2} - (m_2^2 - n_2\delta_1) U_2''$$
$$= \frac{\alpha_2}{2} \frac{d^2(U_2'^2)}{dx_2^2} - j_2\varepsilon_2 \frac{d(U_2'^2)}{dx_2} + m_2^2 \beta_2 U_2'^2 - n_2 .$$

$$\frac{d^2 U_2'''}{dx_2^2} + 2j_2 \frac{dU_2'''}{dx_2} - (m_2^2 - n_2\delta_2) U_2'''$$
$$= \frac{\alpha_2}{2} \frac{d^2(U_2''^2)}{dx_2^2} - j_2\varepsilon_2 \frac{d(U_2''^2)}{dx_2} + m_2^2 \beta_2 U_2''^2 - n_2 .$$

. . . .

. . . .

avendo cura di determinare sempre le U_1'', U_1''' ecc. e le U_2'', U_2''' ecc. in modo che soddisfacciano alle condizioni richieste. I limiti cui tendono le $U_1^{(n)}$ ed $U_2^{(n)}$ sono le soluzioni delle (III_1) e (III_2) che si dovevano determinare. Ciò si dimostra facilmente stabilendo che le differenze fra due soluzioni successive divengono sempre minori, mentre le equazioni differenziali successive rimangono sempre completamente definite nella regione in cui lo erano le III_1 e III_2.

Per qualsiasi scopo fisico sarà certamente sufficiente l'esattezza cui si giungerà coll'integrazione della prima equazione di ogni sistema; noi ci arresteremo perciò a questo grado di esattezza.

Gli integrali della (5) sono:

$$U'_1 = C_1 + A_1 e^{\lambda_1 x_1} + B_1 e^{\mu_1 x_1} ; \quad U'_2 = C_2 + A_2 e^{\lambda_2 x_2} + B_2 e^{\mu_2 x_2} ,$$

ove si pose:

$$C_1 = \frac{n_1}{m_1^2 - n_1\delta_1} , \quad C_2 = \frac{n_2}{m_2^2 - n_2\delta_2}$$
$$\lambda_1 = -j_1 + \sqrt{j_1^2 + m_1^2 - n_2\delta_1} , \quad \lambda_2 = -j_2 + \sqrt{j_2^2 + m_2^2 - n_2\delta_2}$$
$$\mu_1 = -j_1 - \sqrt{j_1^2 + m_1^2 - n_1\delta_1} , \quad \mu_2 = -j_2 - \sqrt{j_2^2 + m_2^2 - n_2\delta_2} ;$$

ed in cui le costanti A_1, B_1, A_2, B_2 sono le radici del seguente sistema di equazione di primo grado, che si deducono dalle condizioni (1_1), (1_2), (2) e (3).

$$C_1 + A_1 + B_1 = 0\,,$$

$$C_2 + A_2\, e^{\lambda_2 l_2} + B_2\, e^{\mu_2 l_2} = 0\,,$$

$$C_2 + A_1\, e^{\lambda_1 l_1} + B_1\, e^{\mu_1 l_1} = C_2 + A_2 + B_2\,,$$

$$k_1\,(\lambda_1\, A_1\, e^{\lambda_1 l_1} + \mu_1\, B_1\, e^{\mu_1 l_1}) - k_2\,(\lambda_2\, A_2 + \mu_2\, B_2) = P\,\frac{i}{q}\,.$$

Formando colle U_1' ed U_2' la prima equazione di ciascuno dei sistemi precedenti ed integrando si avrano le seguenti soluzioni; che per brevità uniremo in una sola formula intendendo che in essa si apponga a tutte le lettere che la compongono, tranne che alla costante e l'indice 1 per avere la U_1'' e l'indice 2 per avere la U_2'':

$$\begin{aligned}
U'' = {} & \frac{m^2\beta C^2 - n}{\lambda\mu} + M\, e^{\lambda x} + N\, e^{\mu x} \\
& - \alpha\Bigg[\frac{2\lambda^2 A^2}{\lambda(2\lambda - \mu)}\, e^{2\lambda x} + \frac{2\mu^2 B^2}{\mu(2\mu - \lambda)}\, e^{2\mu x} + \frac{(\lambda+\mu)^2 AB}{\lambda\mu}\, e^{(\lambda+\mu)x} \\
& \qquad + \frac{\lambda^2 CA[x(\lambda-\mu) - 1]\, e^{\lambda x} + \mu^2\, CB[x(\mu-\lambda) - 1]\, e^{\mu x}}{(\lambda-\mu)^2}\Bigg] \\
& - j\varepsilon\Bigg[\frac{2\lambda A^2}{\lambda(2\lambda - \mu)}\, e^{2\lambda x} + \frac{2\mu B^2}{\mu(2\mu - \lambda)}\, e^{2\mu x} + \frac{2(\gamma+\mu)AB}{\lambda\mu}\, e^{(\lambda+\mu)x} \\
& \qquad + \frac{2\lambda CA[x(\lambda-\mu) - 1]\, e^{\lambda x} + 2\mu CB[x(\mu-\lambda) - 1]\, e^{\mu x}}{(\lambda-\mu)^2}\Bigg] \\
& + m^2\beta\Bigg[\frac{A^2}{\lambda(2\lambda - \mu)}\, e^{2\lambda x} + \frac{B^2}{\mu(2\mu - \lambda)}\, e^{2\mu x} + \frac{2AB}{\lambda\mu}\, e^{(\lambda+\mu)x} \\
& \qquad + \frac{2CA[x(\lambda-\mu) - 1]\, e^{\lambda x} + 2CB[x(\mu-\lambda) - 1]\, e^{\mu x}}{(\lambda-\mu)^2}\Bigg].
\end{aligned}$$

Per determinare le M_1, N_1, M_2 ed N_2 si formerà come precedentemente un sistema di equazioni di primo grado; naturalmente la soluzione di esse sarà molto complicata. Noi tralascieremo questo calcolo bastandoci per ora di aver dimostrato come si possa determinare rigorosamente la temperatura stazionaria di un conduttore bimetallico.

Caso speciale. — Importante per le applicazioni che faremo in seguito è un caso particolare assai più semplice, che ora condidereremo.

Osserviamo che nel caso in cui le variazioni massime della temperatura del conduttore si limitino a pochi gradi, le variazioni dei coefficienti k, h, ω sono d'ordine inferione agli inevitabili errori che si commettono nella loro misura. Inoltre essendo la derivata della temperatura per rapporto al tempo pure assai piccola, l'effetto Thomson potrà venire trascurato. Le equazioni dello

stato stazionario si ridurranno allora al seguente sistema:

$$(6') \qquad 0 = \frac{d^2U_1}{dx_1^2} - \frac{h_1 p}{k_1 q} U_1 + \frac{i^2\omega_1}{q^2 k_1 J} \; ; \quad 0 = \frac{d^2U_2}{dx_2^2} - \frac{h_2 p}{k_2 q} U_2 + \frac{i^2\omega_2}{q^2 k_2 J} \qquad (6'')$$

colle condizioni:

$$(7') \qquad \text{per } x_1 = 0 \quad U_1 = 0 \qquad \text{per } x_2 = l_2 \quad U_2 = 0 \qquad (7'')$$

$$(8) \qquad (U_1)_{l_1} = (U_2)_0$$

$$(9) \qquad P\frac{i}{q} = k_1\left(\frac{dU_1}{dx_1}\right)_{l_1} - k_2\left(\frac{dU_2}{dx_2}\right)_0 .$$

Si avranno le seguenti soluzioni:

$$U_1 = C_1 + A_1 e^{\lambda_1 x_1} + B_1 e^{-\lambda_1 x_1} \qquad U_2 = C_2 + A_2 e^{\lambda_2 x_2} + B_2 e^{-\lambda_2 x_2}$$

in cui sono:

$$C_1 = i^2 \frac{\omega_1}{J q h_1 p}, \quad C_2 = i^2 \frac{\omega_2}{J q k_2 p}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{h_1 p}{k_1 q}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{h_2 p}{k_2 q}},$$

Dalle condizioni $7'$, $7''$, 8 e 9 si deducono quattro equazioni di primo grado che determinano le costanti A_1, B_1, A_2 e B_2. Si avrà:

$$C_1 + A_1 + B_1 = 0$$

$$C_2 + Ae^{\lambda_2 l_2} + B_2 e^{-\lambda_2 l_2} = 0$$

$$C_1 + Ae^{\lambda_1 l_1} + B_1 e^{-\lambda_1 l_1} = C_2 + A_2 + B_2$$

$$\lambda_1 k_1 (A_1 e^{\lambda_1 l_1} - B_1 e^{-\lambda_1 l_1}) - \lambda_2 k_2 (A_2 + B_2) = P\frac{i}{q} .$$

I determinanti con cui si potranno esprimere le costanti A_1, B_1, A_2, B_2 sono assai complicati e difficilmente si potrebbe usare in pratica un' espressione della temperatura in cui intervenissero tali costanti. Osserviamo però che nel punto $x_2 = 0$ la temperatura sarà espressa dalla semplice formula:

$$U_2 = C_2 + A_2 + B_2 ,$$

e che invertendo la corrente e facendo la differenza delle due temperature stazionarie, solo i termini che contengono $P\frac{i}{q}$ a fattore rimarranno duplicati, mentre gli altri si elideranno.

Ne segue che la differenza fra le due temperature stazionarie nel punto $x_2 = 0$ per i due sensi della corrente sarà data dalla formola relati-

vamente semplice:

$$(\Delta U_2)_0 = 2 \frac{Pi}{q} \frac{(e^{\lambda_1 l_1} - e^{-\lambda_1 l_1})(e^{+\lambda_2 l_2} - e^{-\lambda_2 l_2})}{N}$$

ove

$$N = k_1\lambda_1(e^{\lambda_1 l_1} + e^{-\lambda_1 l_1})(e^{\lambda_2 l_2} - e^{-l_2 \lambda_2}) + k_2\lambda_2(e^{\lambda_1 l_1} - e^{-\lambda_1 l_1})(e^{\lambda_2 l_2} + e^{-\lambda_2 l_2}).$$

Già fin d'ora si può vedere che non sarà difficile fondare su questo caso particolare un metodo per la misura dell'effetto Peltier. Mi riservo di ritornare sull'argomento in un prossimo Rendiconto.

Fisica. — *Della densità dei liquidi e dei vapori saturi come funzione della temperatura.* Nota del dott. C. Del Lungo, presentata dal Corrispondente A. Ròiti.

Il prof. G. Guglielmo, in un recente lavoro *Sulla velocità molecolare dei liquidi* (1), giunge alla conclusione, già prevista anche da altri, che la velocità delle molecole di un liquido debba essere eguale a quella delle molecole del suo vapore.

Accettando tale conclusione, almeno come un'ipotesi molto probabile, si può considerare un liquido come un aeriforme di grande densità nel quale le molecole molto vicine fra loro si muovono dentro le sfere d'azione della coesione molecolare. E si può allora ammettere, come altra ipotesi possibile e assai probabile, che le velocità delle molecole di un liquido siano distribuite fra le molecole con la medesima legge che nel vapore, cioè secondo la nota legge del Maxwell.

Partendo da queste due ipotesi, avremmo modo di dedurre teoricamente la relazione che deve essere fra la densità di un liquido, quella del suo vapore saturo e la temperatura. Ricordiamo il meccanismo della vaporizzazione secondo i principî della teoria cinetica dei gas e dei liquidi. Le molecole che dal liquido passano nello spazio sovrastante a formare il vapore, son quelle che arrivano alla superficie libera del liquido con una velocità maggiore delle altre e sufficiente per superare la coesione dell'ultimo strato liquido: le molecole che dal vapore vengono ad urtare la superficie del liquido tornano a far parte di questo; e quando il numero delle prime sia eguale al numero delle seconde, avremo l'equilibrio, ossia il vapore sarà *saturo*. Mentre il liquido si vaporizza, perde le molecole più veloci; e la velocità media delle altre diventando minore, il liquido si raffredda.

(1) Rendic. della R. Acc. dei Lincei (7 novembre 1897).

Le molecole del liquido (in numero di N nell' unità di volume) si possono dividere in due schiere, secondo le loro velocità; le quali come nei gas posson prendere tutti i valori possibili. La prima schiera è quella delle molecole che hanno una velocità minore di un valore assegnato ε, compresa quindi fra 0 ed ε; la seconda schiera è costituita dalle rimanenti, che hanno velocità comprese fra ε e ∞. Indichiamo con n il numero delle molecole di questa schiera; quello delle altre sarà $N - n$.

Finchè la temperatura rimane costante e il liquido in equilibrio, n rimarrà pure costante; e sebbene vi sia continuo scambio di molecole fra le due schiere, sarà lo stesso come se rimanessero divise e distinte.

La *velocità media* (cioè corrispondente alla forza viva media) delle molecole n sarà una certa velocità ω maggiore di ε; la velocità media delle altre molecole $N - n$ sarà minore di ε.

Sia scelto il valore ε tale, che la velocità media ω resulti eguale a quella velocità che è necessaria e sufficiente affinchè una molecola possa vincere l'attrazione dello strato superficiale del liquido e passare nel vapore; essendo, dunque, m la massa di una molecola, sia $\frac{m\omega^2}{2}$ il lavoro necessario per vincere questa attrazione; questo lavoro è l'energia potenziale delle molecole del vapore.

È chiaro che le molecole del liquido, le quali passano nel vapore, appartengono solo alla schiera delle n; tornando nel liquido, riacquistano nella caduta una forza viva eguale almeno a $\frac{m\omega^2}{2}$, ossia una velocità non minore di ω; esse quindi tornano a far parte della medesima schiera.

Quindi queste molecole n, che chiamerò *molecole libere*, circolano dal liquido al vapore e dal vapore al liquido, distribuendosi *uniformemente* nel volume totale come se costituissero un aeriforme disciolto nel liquido. E il numero di molecole contenute nell' unità di volume del vapore saturo, sarà eguale al numero delle *molecole libere* n contenute nell' unità di volume del liquido. Ovvero, indicando con d e D le densità del vapore saturo e del liquido, avremo

$$(1) \qquad \frac{d}{D} = \frac{n}{N}$$

dove N indica, come sopra, il numero totale di molecole contenute nell' unità di volume del liquido.

Alla temperatura critica essendo $d = D$, deve essere anche $n = N$. Applichiamo ora la legge di Maxwell. Sopra N molecole, il numero di quelle che hanno una velocità compresa in un intervallo infinitesimo, fra u e $u + du$, è dato da

$$N f(u)\, du.$$

E quelle che hanno velocità comprese fra limiti a e b sono in numero di

$$N \int_a^b f(u)\, du\,.$$

La forma della funzione $f(u)$ è la seguente:

$$f(u) = \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}}\, u^2\, e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}; \qquad \text{e si ha} \int_0^\infty f(u)\, du = 1\,.$$

La quantità α dipende dalla densità dell'aeriforme e dalla temperatura, per mezzo della relazione

$$\alpha^2 = \frac{2}{3}\, \overline{u^2} \tag{2}$$

essendo $\overline{u^2}$ la media dei quadrati delle velocità molecolari: quindi α^2 è proporzionale alla temperatura misurata col termometro a gas.

Nel nostro caso, applicando la medesima legge alle molecole del liquido avremo

$$n = N \int_\varepsilon^\infty f(u)\, du \tag{3}$$

quindi

$$\frac{d}{D} = \int_\varepsilon^\infty f(u)\, du = \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} \int_\varepsilon^\infty u^2\, e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}\, du\,.$$

Cambiando la variabile di integrazione, ponendo $t = \frac{u}{\alpha}$, si ha

$$\frac{d}{D} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\varepsilon}{\alpha}}^\infty t^2\, e^{-t^2}\, dt\,. \tag{4}$$

L'integrale definito è così funzione del suo limite inferiore $\frac{\varepsilon}{\alpha}$, ossia della temperatura. Il secondo membro della (4) varia fra 1 e 0 quando il limite $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ varia da 0 a ∞. Quindi si vede che il valore di $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ è *nullo* alla temperatura critica, e va crescendo indefinitamente verso lo zero assoluto di temperatura.

Infatti, alla temperatura critica deve essere $\varepsilon = 0$, perchè allora la velocità media delle molecole del liquido giunge appunto a quel valore ω necessario per vincere la coesione; quindi tutte le molecole del liquido essendo in condizione da poter passare allo stato di vapore, la schiera delle *molecole libere n* comprende tutte le N molecole del liquido, le cui velocità son comprese fra 0 e ∞. Così nella (3) se $\varepsilon = 0$, si ha $n = N$.

E poichè, come apparisce dalla (2), α^2 è proporzionale alla temperatura assoluta T, e quindi α è proporzionale a $\sqrt{T}$, ne segue che diminuendo la

temperatura fino allo zero assoluto, il valore di $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ andrà crescendo indefinitamente.

Integrando per parti, si ha

$$\int t^2 e^{-t^2}\, dt = -\frac{te^{-t^2}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-t^2}\, dt$$

e sostituendo nella (4) e ponendo $z = \frac{\varepsilon}{\alpha}$

$$\frac{d}{D} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, z\, e^{-z^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} e^{-t^2}\, dt\,. \tag{5}$$

La (5) ci dà il rapporto $\frac{d}{D}$ in funzione della temperatura per mezzo della variabile z. Essendo troppo incerta la determinazione della forma di z, è meglio considerarla come una funzione indeterminata di T, la quale per T eguale alla temperatura critica è uguale a 0, e per $T = 0$ è infinitamente grande.

La funzione di z data dal secondo membro della (5), la quale per brevità indicheremo con $f(z)$, varia, come si è visto, da 1 a 0 mentre z varia da 0 a ∞. Ma la decrescenza di $f(z)$ è rapidissima, come si vede dalla seguente tabella:

z	$f(z)$	z	$f(z)$	z	$f(z)$
0	1	1	0,572475	2,8	0,001307
0,1	0,999253	1,5	0,312300	3	0,000191
0,3	0,980752	1,8	0,090469		—
0,5	0,918891	2	0,046017		—
0,8	0,733879	2,5	0,005857	∞	0

Ne resulta che applicando la (5) a rappresentare i resultati delle esperienze, il valore di z varierà generalmente fra limiti assai ristretti. Per esempio riferendosi al solfuro di carbonio, del quale il prof. Battelli ha determinato sperimentalmente i volumi specifici del vapore saturo e del liquido sottostante fra limiti assai estesi di temperatura, la z varierebbe solamente fra 2,886 e 2,030, mentre la temperatura varia da 3°,23 a 217°,35.

L'applicazione della equazione (5) alle varie specie di liquidi e respettivi vapori esige operazioni di calcolo assai lunghe; ma per mostrare come essa debba prestarsi a rappresentare i resultati dell'esperienza, basta far notare che essa coincide con una formula teorico-empirica trovata per via tutta diversa.

L'integrale $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-t^2}\,dt$, che è la nota funzione $\Theta(t)$ della *Teoria degli errori*, è eguale ad 1 per $z=0$, e poi va decrescendo rapidamente; tanto che per $z=2$ è meno di 0,005, e per valori di poco superiori diventa piccolissimo: per es. per $z=3$ è minore di 0,00003. Quindi, come abbiam visto pel solfuro di carbonio, per temperature non troppo elevate si può trascurare: *dentro questi limiti* il valore di z è rappresentato assai bene dall'espressione

$$z=\frac{k}{\mathrm{T}^m}$$

essendo k e m costanti. Quindi togliendo l'integrale, e ponendo per z l'espressione data, la (5) diventa

$$\frac{d}{\mathrm{D}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{k}{\mathrm{T}^m}\,e^{-\frac{k^2}{\mathrm{T}^{2m}}}.$$

Indicando con s e σ i volumi specifici del vapore saturo e del liquido, si avrà $d=\frac{1}{s}$, $\mathrm{D}=\frac{1}{\sigma}$, e sostituendo

$$\frac{s}{\sigma}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\mathrm{T}^m}{k}\,e^{\frac{k^2}{\mathrm{T}^{2m}}}$$

da cui

$$\log s-\log\sigma=\log\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2k}\right)+m\log\mathrm{T}+\frac{k^2}{\mathrm{T}^{2m}}.$$

E poichè, nei limiti di temperatura sopra accennati, σ varia pochissimo e può ritenersi costante rispetto a s, potremo scrivere in generale la formola precedente

$$\log s=\mathrm{K}+\frac{a}{\mathrm{T}^n}+b\log\mathrm{T} \tag{6}$$

dove K, a, b, n sono costanti appropriate.

Ora la formola (6), la quale, come abbiam visto, è una riduzione approssimativa della (5), si può ricavare con considerazioni ed approssimazioni analoghe dalla relazione termodinamica di Clapeyron e Clausius

$$r=\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\,(s-\sigma)\,\frac{dp}{d\mathrm{T}}.$$

Infatti, a temperature non molto elevate, e quindi a pressioni e densità non grandi, i vapori saturi non si scostano molto dalla legge di Boyle e

Gay-Lussac, e si può porre $ps = RT$. Inoltre, dentro tali limiti di temperatura, σ è piccolissimo e trascurabile rispetto a s; e il calorico di vaporizzazione r si può esprimere molto bene con una formula lineare

$$r = \alpha - \beta T.$$

Facendo queste sostituzioni nella equazione di Clapeyron, si ha

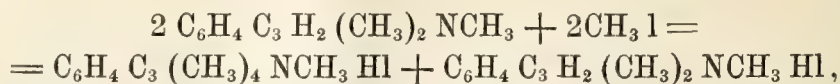
$$\log s = k + \frac{a'}{T} + b' \log T \tag{7}$$

dove k, a', b' son costanti.

Di questa formula, e dell'altra corrispondente $\log p = k - \frac{a}{T} + b \log T$, mi sono una volta occupato mostrandone la relativa importanza teorica, e notando come esse con tre sole costanti arbitrarie si accordino molto bene coi dati sperimentali [1]. È manifesto che questo accordo sarà ancora più perfetto, se si aggiunge una quarta costante arbitraria ponendo T^n in luogo di T; e allora la formula (7) coincide con quella (6): la quale non è che una riduzione approssimata, e valevole solo dentro certi limiti di temperatura, della relazione generale (5) ottenuta coll'applicazione della legge di Maxwell al movimento molecolare dei liquidi, secondo le ipotesi fatte in principio.

Chimica. — *Studî intorno alla costituzione e ad alcune reazioni delle basi derivanti dagli indoli per metilazione* [2]. Nota di A. Piccinini, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una Nota, apparsa qualche tempo fa, nella Gazzetta Chimica Italiana [3], comunicai la scoperta da me fatta di un nuovo alcaloide, nel prodotto risultante dall'azione del joduro metilico ad elevata pressione sulla cosidetta *trimetildiidrochinolina* [4]. Questa reazione, che secondo i risultati delle ricerche di Zatti e Ferratini [5] doveva condurmi direttamente dalla base trimetilata alla pentametilata, svolgendosi secondo la equazione seguente:

$$2\, C_6H_4\, C_3\, H_2\, (CH_3)_2\, NCH_3 + 2CH_3\, I =$$
$$= C_6H_4\, C_3\, (CH_3)_4\, NCH_3\, HI + C_6H_4\, C_3\, H_2\, (CH_3)_2\, NCH_3\, HI,$$

mi diede invece, operando su quantità alquanto più grandi di materiale, il

(1) Rend. della R. Accad. dei Lincei (1° febbraio 1891).

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(3) Gazz. Chim. It., XXXVIII, I, 187.

(4) E. Fischer u. Steche, Ann. Chem. Pharm., 242, 348; Zatti e Ferratini, Rendiconti Accad. Lincei, VI, 2° sem., 202.

(5) Zatti e Ferratini, l. cit.; Gazz. Chim., XXI-II, 325.

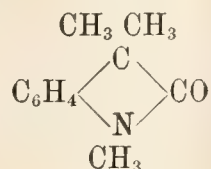
sale jodidrico di un alcaloide omologo della trimetildiidrochinolina e corrispondente alla formola

$$C_{13}\,H_{17}\,N.$$

Questa base è un olio incoloro che arrossa fortemente all'aria e bolle a 260° a pressione ordinaria e a 170°-171° a 30 mm. Il suo *jodidrato* cristallizza in laminette incolore fondenti a 227°-228°, ed il *picrato*, solubilissimo in alcool, è precipitato nell'etere anidro in fogliette di colore giallo-oro che fondono a 107°-108°.

Il comportamento del nuovo alcaloide è perfettamente simile a quello della trimetildiidrochinolina in tutti i punti che ho potuto prendere in esame quando mi occupavo di questi studî; così osservai che esso per riduzione si trasforma in una base più ricca di due atomi d'idrogeno, la quale al pari delle altre basi idrogenate di questa serie non è alterabile all'aria e può trasformarsi in una base secondaria per opera dell'acido jodidrico, dimostrando per tal modo di contenere un metile legato all'azoto, che si deve quindi ammettere anche nel prodotto non saturo primitivo $C_{13}\,H_{17}\,N$. Potei inoltre provare per mezzo della benzoilazione, che la base $C_{13}\,H_{17}\,N$, contiene ancora idrogeno sostituibile, giacchè dà facilmente, al pari della trimetildiidrochinolina, un *benzoilderivato* di natura chetonica, cristallizzato in laminette compatte fondenti a 102°.

Mi rimaneva per ultimo da tentare l'ossidazione di questa sostanza; posso ora comunicare qui che la *tetrametildiidrochinolina*, ossidata col permanganato potassico non offre un passaggio netto e quantitativo al *pr. 3-3 dimetil-n-metil-2-indolinone*

```
        CH3 CH3
           C
C6H4<         >CO
           N
          CH3
```

come fa la trimetildiidrochinolina [1], ma si trasforma in un liquido denso, insolubile negli acidi e negli alcoli, che non ha alcun punto di ebollizione costante. Da questo corpo giunsi a separare con ripetute distillazioni, due componenti solidi ben distinti ed uno liquido bollente intorno a 265° alla pressione di 754 mm.

Uno dei corpi solidi si depositò spontaneamente dalla parte dell'olio greggio che bolliva tra 250°-265°; era un corpo cristallizzato in fogliette leggiere, incolore, e fu facilmente identificato coll'indolinone sopra citato perchè fondeva a 52°-53° e trattato in soluzione acetica diluita con cloruro mercurico diede un *cloromercurato* cristallizzato in lunghissimi aghi fondenti a 125°.

[1] G. Ciamician e A. Piccinini, Rend. Acc. Lincei, vol. V, 2° sem., pag. 50.

L'altro corpo solido rimase come residuo nei palloncini che servirono pel frazionamento e ne fu estratto coll'etere petrolico, da cui cristallizza in prismetti compatti assai poco solubili quando sono puri e fondenti a 124°. Questa sostanza è di natura neutra; si scioglie a caldo e cristallizza per raffreddamento dalle soluzioni concentrate di acido cloridrico e potassa caustica, senza alcuna alterazione. Non riduce il liquido di Fehling e trattato con bicromato potassico ed acido solforico, dà una colorazione rosso sangue che per diluzione passa al verde. La composizione di questo corpo, rispondente alla formola $C_{24} H_{30} N_2 O_2$, quanto il suo peso molecolare, compreso tra 383°-385°, secondo i resultati di alcune determinazioni crioscopiche, stanno a dimostrare che esso prende origine da un processo di ossidazione e condensazione di due molecole di base. Disgraziatamente la piccola quantità di prodotto che potei isolare non mi ha permesso di estendere, per quanto avrei desiderato, le ricerche, onde stabilirne la costituzione.

Finalmente mi sono occupato del prodotto liquido da cui si depositò l' indolinone; dopo ripetute distillazioni lo ridussi ad un punto di ebollizione oscillante tra 260°-265°. Era un olio neutro, incoloro, che non potei far solidificare, nè salificare in alcun modo; all'analisi non diede numeri tali da poterne dedurre una formola qualsiasi; però per bromurazione e nitrazione riuscii ad estrarne una notevole quantità del bibromo e binitroderivato dell' indolinone terziario sopra citato, fondenti rispettivamente a 126° e 204°. Questo fatto dimostra che la parte oleosa del prodotto d'ossidazione è costituita in parte dal chetone $C_{11} H_{13} NO$, misto ad altre sostanze che gl' impediscono di cristallizzare; infatti nelle acque madri alcooliche del bibromo derivato fondente a 126°, rinvenni un altro bromocomposto che non ho ancora analizzato e che fonde a 180°.

La base tetrametilata si comporta adunque all'ossidazione in un modo assai più complesso che la trimetildiidrochinolina; sembra quindi che il metile ultimamente introdotto turbi l'assetto della molecola in guisa da render possibile l'attacco agli ossidanti, in più maniere; si potrebbe però con sufficiente fondamento attribuire la causa perturbante dell' ossidazione anche all' ultimo atomo di idrogeno mobile rimasto nel nucleo di questa sostanza.

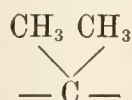
Questa opinione troverebbe un appoggio anche nel fatto che la *pentametildiidrochinolina*, nella quale questo idrogeno è stato eliminato, come dimostrerò più avanti, si trasforma totalmente e con facilità grandissima nello stesso prodotto che si ha dalla base tetrametilata.

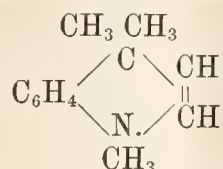
Se ora da questi fatti si vogliono trarre congetture intorno alle relazioni di struttura correnti tra questi corpi, si incontrano non lievi difficoltà; ricorderò qui prima di tutto come l'ossidazione della *trimetildiidrochinolina* degli indoli, eseguita dal prof. Ciamician e da me ([1]), abbia messo fuori di discus-

([1]) G. Ciamician e A. Piccinini, l. cit.; Berl. Ber., 29, 2466.

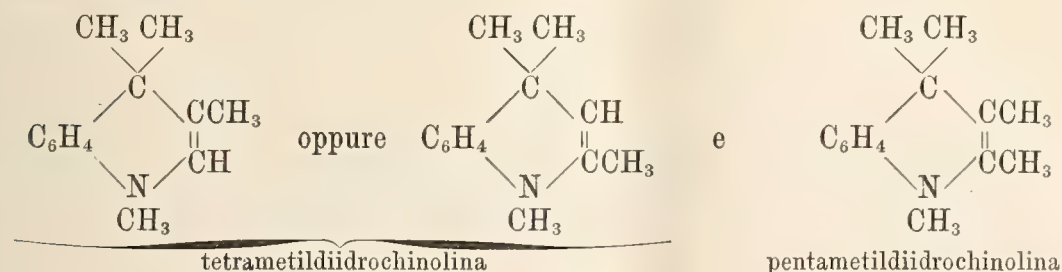
sione le formole chinoliniche biidrogenate proposte dal Ferratini, e ne abbia reso verosimili altre, fondate sulla facile trasformazione della base suddetta nel chetone più volte citato, la cui costituzione è ben definita. D'altra parte è risultato chiaro il motivo per cui non si può passare con reazioni ossidanti normali dalla *dimetiltetraidrochinolina secondaria* $C_6H_4\,C_3H_4\,(CH_3)_2\,NH$, alla corrispondente *chinolina vera* non idrogenata [1].

Tale causa risiede nell'esistenza del gruppo

$$\begin{array}{c} CH_3\ CH_3 \\ \diagdown\diagup \\ -C- \end{array}$$

in quella parte del nucleo che contiene l'azoto. Ora la presenza di questo gruppo anche nella *tetrametil* e *pentametildiidrochinolina* è provata dalla trasformazione di queste basi nell'*indolinone*; si deve perciò ammettere che tutte queste sostanze abbiano un solo ed identico scheletro fondamentale; così, rappresentando, come si è fatto, la *trimetildiidrochinolina* collo schema seguente:

$$\begin{array}{l} \quad\quad CH_3\ CH_3 \\ \quad\quad\diagup\ C\ \diagdown CH \\ C_6H_4 \quad\quad\quad \Vert \\ \quad\quad\diagdown N. \diagup CH \\ \quad\quad\quad CH_3 \end{array}$$

le formole relative alle altre basi più metilate dovrebbero esser scritte come segue:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{l} \quad CH_3\ CH_3 \\ \quad\quad \diagdown\diagup \\ \quad\quad\ C \\ \quad \diagup\quad\diagdown CCH_3 \\ C_6H_4 \quad\quad \Vert \\ \quad \diagdown N \diagup CH \\ \quad\quad CH_3 \end{array} & \text{oppure} & \begin{array}{l} \quad CH_3\ CH_3 \\ \quad\quad \diagdown\diagup \\ \quad\quad\ C \\ \quad \diagup\quad\diagdown CH \\ C_6H_4 \quad\quad \Vert \\ \quad \diagdown N \diagup CCH_3 \\ \quad\quad CH_3 \end{array} & \text{e} & \begin{array}{l} \quad CH_3\ CH_3 \\ \quad\quad \diagdown\diagup \\ \quad\quad\ C \\ \quad \diagup\quad\diagdown CCH_3 \\ C_6H_4 \quad\quad \Vert \\ \quad \diagdown N \diagup CCH_3 \\ \quad\quad CH_3 \end{array} \\ \end{array}$$

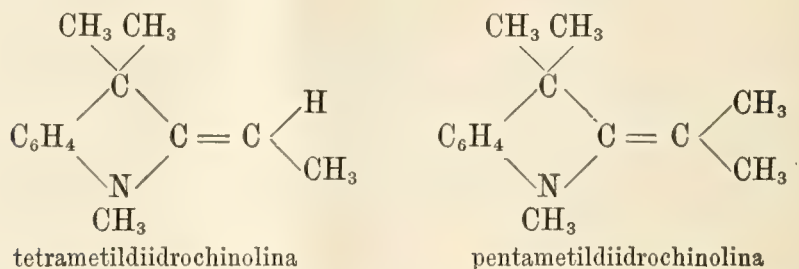
tetrametildiidrochinolina (le prime due formole) — pentametildiidrochinolina (la terza)

Con questi schemi si comprende bene l'analogia di comportamento delle tre basi in molte reazioni; non occorre alcun sforzo però, per dimostrare che il passaggio dalle due ultime forme all'indolinone più volte citato, non è troppo facilmente spiegabile; e qui si potrebbe obbiettare che in realtà la base tetrametilata si comporta all'ossidazione in modo affatto speciale; lasciando

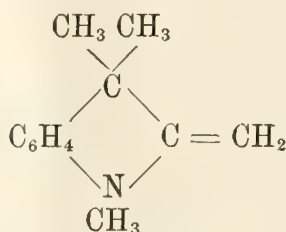
[1] La trasformazione della *dimetiltetraidrochinolina* in *αγdimetilchinolina*, operata dal Ferratini (Gazz. Chim. It, XXIII, II, 108) non si può considerare come prova della costituzione chinolinica del nucleo di questa base; anche il cloridrato dell'*αmetildiidroindolo* distillato su polvere di zinco, dà oltre che l'indolo corrispondente, quantità non trascurabili di *chinolina*, riconosciuta all'odore e identificata col picrato caratteristico fondente a 202°-203°. Questo risultato notevole dimostra come in certi casi non si possa fare alcun assegnamento sopra la deidrogenazione con polvere di zinco.

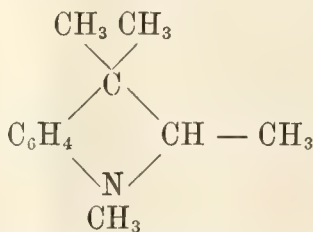
però per un momento in disparte la base tetrametilata e considerando i risultati dell'ossidazione della pentametildiidrochinolina, l'insufficienza della formola attribuitale risalta in modo evidentissimo, giacchè in questo caso la formazione dell'indolinone, avviene in modo quantitativo ed istantaneo; il prodotto di ossidazione è così puro che cristallizza il più delle volte spontaneamente.

Assai più chiaro invece apparisce l'andamento della reazione, quando a questi corpi si attribuisca una costituzione indolica, raggruppando gli atomi di idrogeno mobili in un gruppo laterale collegato al nucleo principale, per doppio legame; tale ipotesi è stata presa in considerazione da noi già da lungo tempo; ma sia per la novità del caso che non ha esempî nella letteratura chimica, sia perchè molti punti oscuri sul comportamento di questi corpi non vengono chiariti, così, meglio che colle antiche formole, non si è creduto conveniente di doverne fare espressa menzione, discutendo i risultati dell'ossidazione della trimetildiidrochinolina. Ora però che essa viene avanzata anche da altri estranei a questi laboriosi lavori e confermata anche da sintesi eseguite in questo laboratorio [1], trovo necessario di esporre qui in forma schematica la costituzione che si dovrebbe attribuire ai due corpi da me studiati, secondo tale ipotesi:

$$\begin{array}{ccccc} & CH_3\ CH_3 & & & \\ & \diagdown\diagup & & & \\ & C & & & \\ \diagup & & \diagdown & & \\ C_6H_4 & & & C = C & \begin{array}{l} \diagup H \\ \diagdown CH_3 \end{array} \\ \diagdown & & \diagup & & \\ & N & & & \\ & CH_3 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & CH_3\ CH_3 & & & \\ & \diagdown\diagup & & & \\ & C & & & \\ \diagup & & \diagdown & & \\ C_6H_4 & & & C = C & \begin{array}{l} \diagup CH_3 \\ \diagdown CH_3 \end{array} \\ \diagdown & & \diagup & & \\ & N & & & \\ & CH_3 & & & \end{array}$$

tetrametildiidrochinolina — pentametildiidrochinolina

Questa struttura corrisponde all'altra analoga della *trimetildiidrochinolina*

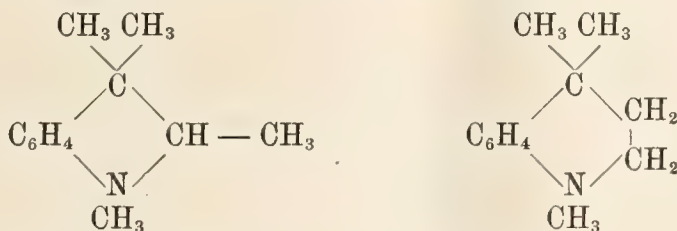
$$\begin{array}{cccc} & CH_3\ CH_3 & & \\ & \diagdown\diagup & & \\ & C & & \\ \diagup & & \diagdown & \\ C_6H_4 & & & C = CH_2 \\ \diagdown & & \diagup & \\ & N & & \\ & CH_3 & & \end{array}$$

che è già stata implicitamente pubblicata sotto la forma satura

$$\begin{array}{cccc} & CH_3\ CH_3 & & \\ & \diagdown\diagup & & \\ & C & & \\ \diagup & & \diagdown & \\ C_6H_4 & & & CH - CH_3 \\ \diagdown & & \diagup & \\ & N & & \\ & CH_3 & & \end{array}$$

[1] G. Plancher. Rend. Acc. Linc., vol. VII, 1° sem., fasc. 10.

nei lavori eseguiti dal prof. Ciamician e da me [1] e inserita, per la base secondaria, anche nell'ultima edizione del Beilstein [2]; essa dà ragione in modo evidentissimo del comportamento della base trimetilata e pentametilata all'ossidazione, e spiega pure le anomalie osservate nel caso della tetrametildiidrochinolina, poichè mentre dimostra che questa base è suscettibile di ossidarsi come le altre in modo normale, per eliminazione della catena laterale, offre pure un punto di attacco agli ossidanti nell'idrogeno quaternario che contiene; per tale ossidazione parziale, è assai probabile che si formino composti intermedî che condensandosi reciprocamente, diano origine alla sostanza solida complessa che costituisce la parte meno volatile del prodotto, ed a quelle che rendendo impuro il chetone $C_{11}H_{13}NO$, ne impediscono la cristallizzazione.

Io non enumererò qui tutti quei fatti che sono a nostra conoscenza e che oltre a quelli che ho già citati, possono servire di appoggio alle formole col nucleo indolico, tanto più che questo è stato esposto dal mio collega G. Plancher in un'altra Memoria pure presentata a questa Accademia.

Per parte mia aggiungerò solo che seguendo l'ipotesi della struttura pentaciclica della parte azotata del nucleo di queste sostanze, mi sono adoperato a trovarne la dimostrazione per una via diversa da quelle finora seguite; se infatti si fa il raffronto tra le due formole seguenti:

$$
\begin{array}{ccc}
 & CH_3\ CH_3 & \\
 & \diagdown\ \diagup & \\
 & C & \\
 \diagup & & \diagdown \\
C_6H_4 & & CH - CH_3 \\
 \diagdown & & \diagup \\
 & N & \\
 & CH_3 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & CH_3\ CH_3 & \\
 & \diagdown\ \diagup & \\
 & C & \\
 \diagup & & \diagdown CH_2 \\
C_6H_4 & & | \\
 \diagdown & & \diagup CH_2 \\
 & N & \\
 & CH_3 &
\end{array}
$$

che rappresentano il prodotto di idrogenazione completa nel nucleo azotato, della cosidetta trimetildiidrochinolina, si riscontra immediatamente che esse differiscono anche per una caratteristica notevole; la prima contiene infatti un atomo di carbonio asimmetrico che manca affatto nella seconda. Questa base adunque, se ha la costituzione tanto discussa, si deve scindere in due isomeri dotati di potere rotatorio inverso; ciò si verifica realmente; solo che non si potè effettuare la scissione sulla base ora indicata, perchè non è possibile ottenerne dei tartrati cristallizzabili. Dovetti ricorrere per tale esperienza alla corrispondente base secondaria, cioè alla *dimetiltetraidrochinolina.* Questa sostanza si salifica coll'acido tartarico abbastanza bene, cosicchè potei dopo molte cristallizzazioni, giungere ad isolare un tartrato che fondeva esattamente ad 86°, da cui ricavai una base levogira. La quantità del prodotto ottenuto in tal modo non mi ha permesso però di esaminarlo direttamente

[1] G. Ciamician e A. Piccinini, l. cit.

[2] Beilstein, Handbuch d. Org. Chemie, 4 Aufl., pag. 207.

al polarimetro; perciò mi sono dovuto limitare, per evitare perdite, ad esaminarne il cloridrato. Questo sale in soluzione acquosa al 4.44 per cento, deviò il piano della luce polarizzata di 1°,4, come media di moltissime osservazioni eseguite a 20° con un polarimetro di Wild. La soluzione possedeva a 20°, la densità 1.0055. Con questi dati si calcola per il cloridrato:

$$[\alpha] = -15°,6$$

Naturalmente io non attribuisco a questi numeri che un valore approssimativo, giacchè non ho mezzi per eseguire le misure in modo rigoroso. Mi accontento perciò di aver conseguito lo scopo prefissomi, dimostrando la presenza del carbonio asimmetrico in una delle principali basi di questa serie.

Contemporaneamente agli studî che ora ho esposto, ne ho eseguiti altri sulla preparazione e metilazione ulteriore della *pentametildiidrochinolina* allo scopo di completare le conoscenze che già si avevano su questo argomento.

Siccome l' unico metodo di preparazione di questa base, consistente nel trattamento della trimetildiidrochinolina con joduro metilico a 120°, sotto pressione, non dà che rendimenti esigui, specialmente perchè in questa reazione si origina la base $C_{13} H_{17} N$, ho cercato altre vie più comode per ottenere il prodotto che mi era necessario, ed ho trovato che tanto la trimetil, quanto la tetrametildiidrochinolina, sono suscettibili di metilarsi completamente, trasformandosi quindi nella base pentametilata, quando vengano poste a reagire con joduro metilico, in una soluzione di soda o potassa al 20 per cento, scaldando lievemente. La trasformazione è abbastanza rapida, ed il consumo di alcali dà una misura approssimativa del progresso della reazione. Per metilare completamente 20 gr. di trimetildiidrochinolina, occorrono circa due giorni. Il prodotto della reazione è costituito quasi per intero dalla base $C_{14} H_{19} N$, che può esser isolata facilmente coi soliti mezzi e purificata per mezzo del *picrato*, che si separa dall' alcool assoluto in squamette lucenti di colore giallo-oro, fondenti a 128°-129°.

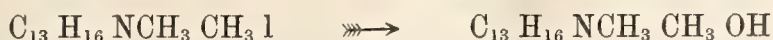
La base riottenuta dal picrato bolle tra 268°-269° a 750 mm. È un liquido perfettamente incoloro, di densità quasi uguale all'acqua, che arrossa lentamente all'aria. Trattata in soluzione cloridrica con cloruro d'oro dà un *cloroaurato* momentaneamente oleoso che si rapprende rapidamente in massa cristallina, e si separa dall'acido cloridrico diluito, in cui è pochissimo solubile, in aghetti delicati, fondenti a 152°-153°. In soluzione eterea con acido jodidrico dà un jodidrato oleoso denso che poi cristallizza e purificato dall'alcool assoluto, con aggiunta di etere si separa in prismetti incolori fondenti a 178°-179°.

La poca alterabilità all'aria di questa base e le proprietà ora indicate, discordanti alquanto da quelle note finora, tra cui specialmente emergono la capacità a formare un picrato cristallino e un cloroaurato stabile anche a

caldo, mi indussero a rinnovare l'esame delle caratteristiche della base pentametilata, preparata col metodo di Zatti e Ferratini. Per ragioni di brevità non esporrò qui la lunga serie di purificazioni cui sottoposi il prodotto della reazione, e dirò soltanto, che in tutti i caratteri che potei notare esso si dimostrò identico a quello ottenuto per metilazione in presenza di alcali.

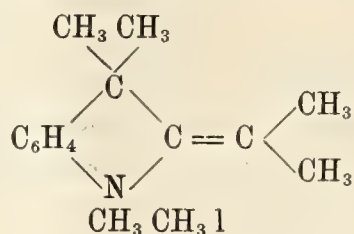
Estendendo le mie ricerche alla metilazione ulteriore della stessa base, ho trovato anch' io, come già osservarono Zatti e Ferratini, che la reazione assume finalmente l'aspetto di una metilazione normale, con formazione di un jodometilato paragonabile a quelli di chinolina e piridina e come questi scomponibile dagli alcali. A questo punto cessa però la coincidenza tra le osservazioni degli autori citati e le mie; ciò si deve senza dubbio all'alto grado di purezza della materia prima che io ho impiegato. Il jodometilato che io ottenni scaldando la base con joduro metilico a 100° per lungo tempo, è un corpo cristallizzato in aghetti e colorato per lo più in rosso. Purificato coll'alcool assoluto si ottiene perfettamente incoloro e fondente a 180°, cioè 4 o 5 gradi più alto di quanto fu già osservato.

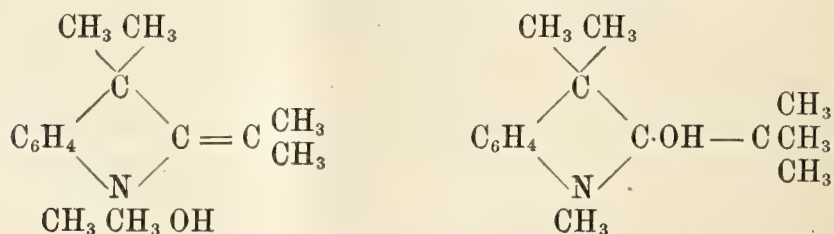
Assai notevole è il comportamento di questo corpo cogli alcali. Zatti e Ferratini osservarono che trattandolo con potassa e distillando a vapore, esso si trasforma in un olio basico volatile, più denso dell'acqua, dotato di debole reazione alcalina e di grande stabilità; la composizione di questo olio fu determinata da quegli autori per mezzo dell'analisi di alcuni sali, tra cui caratteristico è quello *aurico*, fondente a 144°-146° (1). Anch' io operando nello stesso modo, ho trovato fatti corrispondenti in tutto a quelli esposti; ho preparato per di più il picrato della base stessa che cristallizza dalla soluzione alcoolica per aggiunta di etere e fonde costantemente a 159°-160°. I risultati delle analisi dimostrano che questa sostanza sta al jodometilato di pentametildiidrochinolina nello stesso rapporto che l' idrato di un ammonio al relativo joduro.

$$C_{13}H_{16}NCH_3\,CH_3I \longrightarrow C_{13}H_{16}NCH_3\,CH_3OH$$

Se però si fa la scomposizione del jodometilato con potassa fredda, dopo averlo sciolto in acqua, si ottiene un prodotto solido cristallizzabile dall'alcool e dall'etere in grossi prismi fondenti a 73°-74°, che ha la composizione stessa della base oleosa suddescritta, ma ne diversifica essenzialmente nei sali; il suo *picrato* cristallizzato dall'alcool fonde a 129°-130°, e il *cloroaurato* a 164°-165°. — La base solida, che io ho analizzato è piuttosto difficile ad afferrarsi perchè si trasforma colla massima facilità, per cause ancora ignote, nel suo isomero liquido; anzi ciò accade specialmente quando per successive cristallizzazioni dal ligroino esso ha raggiunto il massimo grado di purezza. Il passaggio alla forma liquida può farsi anche sottoponendo alla distillazione

(1) Zatti e Ferratini, Gazz. Chim., XXI, II, 325.

in presenza di potassa, il prodotto solido, puro. Nulla posso dire per ora intorno alla costituzione di questi due corpi assai interessanti, giacchè mi occorrono nuove quantità di materiale per l'ulteriore studio; dirò solo che, mentre assai verosimilmente al jodometilato di *pentametildiidrochinolina* che è un composto unico ben definito, si può attribuire la formola seguente:

$$\begin{array}{ccccc} & CH_3\,CH_3 & & & \\ & \diagdown\diagup & & & \\ & C & & & \diagup CH_3 \\ C_6H_4 & & C = C & & \\ & \diagdown N \diagup & & & \diagdown CH_3 \\ & CH_3\,CH_3\,I & & & \end{array}$$

non si può con uguale certezza affermare che il prodotto di scomposizione per opera degli alcali, debba essere l'idrato corrispondente; per esso si possono infatti prevedere due forme che io però cito qui colla massima riserva, giacchè non conosco al presente nessun fatto sperimentale relativo al comportamento di queste sostanze, che possa dare appoggio a tale ipotesi:

$$\begin{array}{cccc} & CH_3\,CH_3 & & \\ & \diagdown\diagup & & \\ & C & & \\ C_6H_4 & & C = C & \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} \\ & \diagdown N \diagup & & \\ & CH_3\,CH_3\,OH & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & CH_3\,CH_3 & & \\ & \diagdown\diagup & & \\ & C & & CH_3 \\ C_6H_4 & & C{\cdot}OH - C & CH_3 \\ & \diagdown N \diagup & & CH_3 \\ & CH_3 & & \end{array}$$

Dall'esame di questi schemi apparisce pure la via che si deve seguire per decidere sul loro valore, ed io sono occupato anche in tale ricerca.

Per ultimo debbo render noto che la facile sostituibilità dell'idrogeno contenuto nella parte azotata del nucleo di queste basi, quando si operi in ambiente alcalino, mi ha indotto ad esaminare il comportamento degli indoli nelle stesse condizioni. I miei esperimenti si sono per ora limitati al metilchetolo, unico rappresentante di questa serie di corpi, che fosse a mia disposizione.

L'αmetilindolo sospeso in una liscivia alcalina al 20 per cento, e addizionato di joduro metilico, si metila in breve tempo ad una temperatura di 30°-40°, trasformandosi in *pentametildiidrochinolina* $C_{14}\,H_{19}\,N$ che si può isolare coi soliti mezzi. Il rendimento è pressochè quantitativo.

La formazione delle basi indoliche può dunque effettuarsi anche indipendentemente dalla pressione e dall'alta temperatura; solo però operando in presenza di alcali, non è possibile limitare la reazione in modo da poter isolare i primi termini della metilazione, giacchè questi subiscono a loro volta l'azione del joduro alcoolico, trasformandosi nel prodotto che non contiene più idrogeno sostituibile.

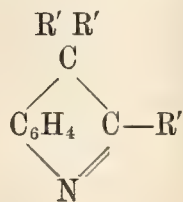
Io credo quindi di poter considerare con ragione la metilazione in ambiente alcalino come un mezzo atto a riconoscere la presenza di idrogeno mobile in tutti questi interessanti corpi, tanto quanto la sostituzione con radicali acidi; infatti, mentre dalla *trimetil* e dalla *tetrametildiidrochinolina* si possono ottenere degli acilderivati, tal cosa non è possibile colla base pentametilata. Così si spiega anche come questo alcaloide non si trasformi nel suo jodometilato o nei derivati idrati che ho già descritto, ma rimanga tale e quale allo stato libero, nell'ambiente alcalino in cui si forma, malgrado la presenza del joduro metilico; come già dissi sopra in questo caso non si tratta più di una sostituzione di idrogeno, ma bensì di una addizione del joduro alcoolico; la reazione cambia quindi tolalmente di natura ed è regolata solo dalla tendenza specifica della base a combinarsi in forma di ammonio.

Chimica. — *Intorno alla costituzione delle basi che si formano dagli indoli per azione dei ioduri alcoolici.* Nota di G. Plancher e D. Bettinelli, presentata dal Socio Ciamician.

In due Note presentate ultimamente a questa Accademia [1] uno di noi ha esposte le sintesi di alcune delle basi che si ottengono dagli indoli per l'azione dei joduri alcoolici, e con esse ha dimostrato che questi alcaloidi non sono diidrochinoline, ma bensì corpi di struttura indolica.

Ha dimostrato inoltre che i prodotti di questa reazione sono da dividersi in due classi:

La prima di basi non alchilate, all'azoto che hanno per principale caratteristica di non arrossare all'aria e di non ridurre a freddo il camaleonte. Un esempio di esse è la *ββdietilαmetilindolenina* che si rinviene nei prodotti dell'etilazione del metilchetolo [2]. Per esse ha proposto la formola:

```
       R' R'
        C
       / \
   C6H4   C—R'
       \ //
        N
```

Questa costituzione, accertata in modo decisivo dalle sintesi della *ββαtrimetilindolenina* e della *ββdimetilαisopropilindolenina*, ha avuto una recente e brillante riconferma nelle esperienze di Piccinini [3] che ha potuto sdop-

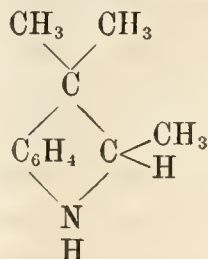
(1) Rend. dei Lincei, serie 5ª, vol. VII, pag. 275 e 316.

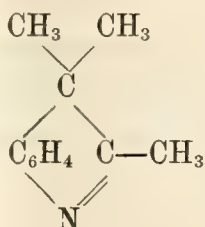
(2) E. Fischer und Steche, Ann. der Chem., 242-259; Ciamician e Plancher, Gazz. Chim. It., 27-a-389.

(3) Vedi in questi Rendiconti pag. 358.

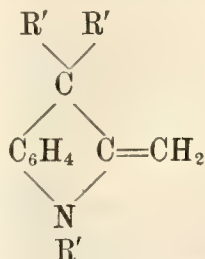
piare la β-β-α-trimetilindolina, che si ottiene per idrogenazione dalla trimetilindolenina corrispondente, nei suoi componenti otticamente attivi.

Stabilito che la base idrogenata contiene un atomo di carbonio assimmetrico, la costituzione di essa

$$\begin{array}{c} CH_3 \quad CH_3 \\ \diagdown\diagup \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \\ C_6H_4 \quad C{<}^{CH_3}_{H} \\ \diagdown \quad \diagup \\ N \\ H \end{array}$$

restava provata ed era confermata per la base dalla quale deriva la formola

$$\begin{array}{c} CH_3 \quad CH_3 \\ \diagdown\diagup \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \\ C_6H_4 \quad C{-}CH_3 \\ \diagdown \quad /\!\!/ \\ N \end{array}$$

La seconda classe è data da quegli alcaloidi che hanno un alchile legato all' azoto. La loro caratteristica più appariscente è quella di colorarsi rapidamente all'aria in un bel rosso fucsina intensissimo. Esse riducono anche a freddo il camaleonte; ridotte danno delle basi terziarie, ed anch' esse sono tali benchè non posseggano tutte le proprietà di alcaloidi terziarî. Siccome poi si ottengono dalle indolenine corrispondenti per azione dei ioduri alcoolici, quest' ultime furono credute secondarie. L' esempio più noto di tali corpi è la base che si forma dal metilchetolo per azione del joduro di metile [1] e che fin qui fu detta *trimetildiidrochinolina.*

La formola che uno di noi ha proposto per tali corpi

$$\begin{array}{c} R' \quad R' \\ \diagdown\diagup \\ C \\ \diagup \quad \diagdown \\ C_6H_4 \quad C{=}CH_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ N \\ R' \end{array}$$

dà ragione della maggior parte dei fatti che intorno ad essi si conoscono. La sostituibilità degli idrogeni del metilene sia cogli alchili che coi radicali

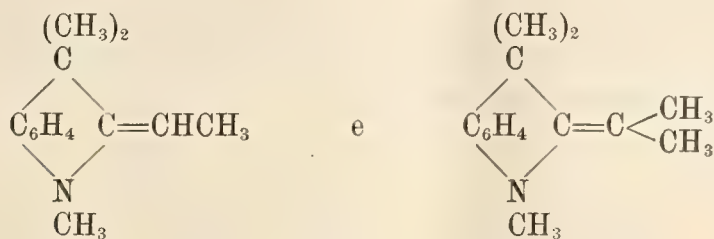
[1] Fischer e Meyer, Berl. Ber., 23-2628; Zatti e Ferratini, Gazz. Chim. It., 20, 711.

acidi che essi presentano, deve infatti riferirsi alla proprietà che ha il doppio legame di addizionare i joduri alcoolici o i cloruri dei radicali acidi e di ricostituirsi eliminando gli idracidi.

L' aggruppamento

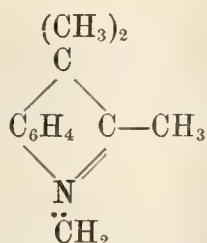
che essi contengono richiederebbe invero, che addizionando i joduri alcoolici dessero immediatamente dei veri joduri ammonici. Se ciò di fatto non si verifica, la ragione si è che la formazione dell' ammonio costituisce un ultimo stadio dell' alchilazione di queste basi, al quale non si può arrivare che quando siano già sostituiti tutti gli idrogeni del metilene.

A questa seconda classe appartengono la base ottenuta da Piccinini [1] e chiamata *tetrametildiidrochinolina* e quella che Zatti e Ferratini prepararono e chiamarono *pentametildiidrochinolina* [2]. Esse invece del metilene contengono rispettivamente l' etilidene e l' isopropilidene

$$\begin{array}{c} (CH_3)_2 \\ C \\ / \quad \backslash \\ C_6H_4 \quad C{=}CHCH_3 \\ \backslash \quad / \\ N \\ CH_3 \end{array} \qquad e \qquad \begin{array}{c} (CH_3)_2 \\ C \\ / \quad \backslash \\ C_6H_4 \quad C{=}C{<}{\begin{smallmatrix} CH_3 \\ CH_3 \end{smallmatrix}} \\ \backslash \quad / \\ N \\ CH_3 \end{array}$$

come uno di noi ha dimostrato per la seconda e come si deduce per analogia per la prima.

Questa costituzione non era però la sola che potesse essere presa in esame per le basi terziarie.

Brunner infatti, che in questi ultimi tempi è arrivato alle stesse conclusioni a cui è arrivato uno di noi [3], lascia per la cosidetta *trimetildiidrochinolina* la scelta tra la formola soprascritta e la seguente:

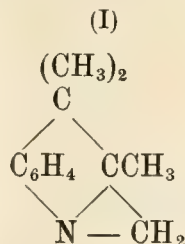
$$\begin{array}{c} (CH_3)_2 \\ C \\ / \quad \backslash \\ C_6H_4 \quad C{-}CH_3 \\ \backslash \quad // \\ N \\ \ddot{C}H_2 \end{array}$$

(1) Gazz. Chim. It., 28-a-191.

(2) Zatti e Ferratini, Gazz. Chim. It., 20-717, 21-b-327.

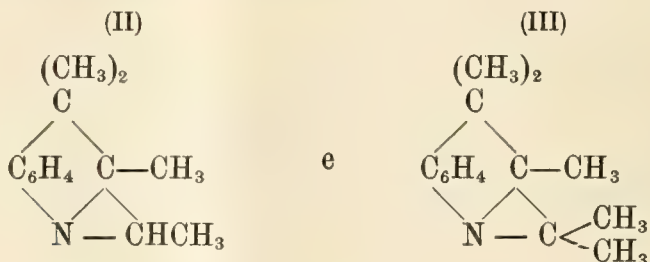
(3) Berl. Berichte, 30-614.

Assai poco probabile, perchè se avesse tale costituzione non potrebbe dare, per ossidazione, *il ββntrimetilindolinone.*

Un' altra formola ([1]) poteva essere posta in discussione per la cosidetta *trimetildiidrochinolina*

```
         (I)
       (CH3)2
        C
       / \
   C6H4   CCH3
       \ / \
        N — CH2
```

Essa spiegherebbe assai bene la stabilità al permanganato degli acilderivati di questa base, e neppur è esclusa dallo sdoppiamento su riferito operato dal Piccinini; basta infatti ammettere che nell' idrogenazione l' anello triatomico si apra tra i due atomi di carbonio, per poter arrivare colla successiva smetilazione alla ββαtrimetilindolina.

Essa è resa però poco probabile da diversi fatti, e tra i già noti basti citare il seguente: Se si ammette per l' alcaloide fondamentale la formola (I) i prodotti della sua ulteriore metilazione (*tetra* e *pentametildiidrochinolina*), giacchè hanno le stesse proprietà dell' alcaloide dal quale provengono, dovrebbero avere rispettivamente le formole:

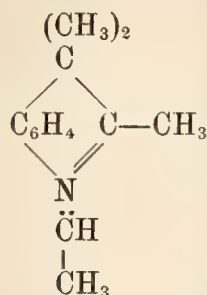
```
        (II)                        (III)
      (CH3)2                      (CH3)2
       C                           C
      / \                         / \
  C6H4   C—CH3        e       C6H4   C—CH3
      \ / \                       \ / \     CH3
       N — CHCH3                   N — C<
                                            CH3
```

e mentre si potrebbe spiegare la formazione del *ββntrimetilindolinone* dall' alcaloide della prima formola supponendo un' idrolisi preventiva, non si può in nessun modo ammettere che si formi dalle (II) e (III) nemmeno con ipotesi ancor più arrischiate.

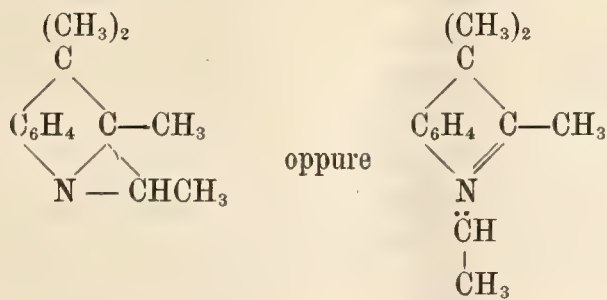
Abbiamo però ancora cercato un fatto, che indipendentemente da tutto il resto, ci permettesse di discutere ed escludere le due ultime costituzioni, onde la fiducia nella formola da uno di noi proposta venisse ad essere accresciuta.

Se alla base già chiamata trimetildiidrochinolina dessimo la costituzione del metilene attaccato all' azoto pentavalente, alla tetrametildiidro-

[1] Abbiamo avuto la cura di escludere che queste metilenindoline siano dei polimeri, per via crioscopica; ed abbiamo trovato che la *ββntrimetilαmetilenindolina* possiede un peso molecolare corrispondente alla formola semplice.

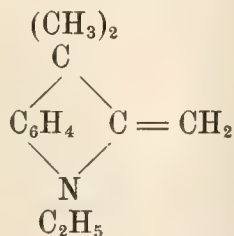
chinolina, che ha le stesse proprietà della base da cui deriva, dovremmo dare la formola:

$$\begin{array}{ccc} & (CH_3)_2 & \\ & C & \\ / & & \backslash \\ C_6H_4 & & C-CH_3 \\ \backslash & & /\!/ \\ & N & \\ & \ddot{C}H & \\ & | & \\ & CH_3 & \end{array}$$

La cosidetta trimetildiidrochinolina si forma dalla $\beta\beta\alpha$trimetilindolenina per mezzo del joduro di metile, e se ad essa diamo o l'una o l'altra delle due ultime costituzioni esaminate, alla base che si otterrà dalla stessa indolenina mediante l'azione del joduro di etile dovranno spettare rispettivamente le formole:

$$\begin{array}{ccc} & (CH_3)_2 & \\ & C & \\ / & & \backslash \\ C_6H_4 & & C-CH_3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & N - & \dot{C}HCH_3 \end{array} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{array}{ccc} & (CH_3)_2 & \\ & C & \\ / & & \backslash \\ C_6H_4 & & C-CH_3 \\ \backslash & & /\!/ \\ & N & \\ & \ddot{C}H & \\ & | & \\ & CH_3 & \end{array}$$

In entrambi i casi cioè dovrebbe essere identica alla *tetrametildiidrochinolina.*

I fatti sperimentali che vengono qui sotto riassunti dimostrano invece perfettamente il contrario, e danno perciò il mezzo di escludere le due formole indipendentemente da altri fatti.

Noi riteniamo che la formola coll'alchilene in posizione α allo stato presente della questione sia la più soddisfacente, e il corpo qui sotto descritto è una nuova base terziaria, e precisamente la $\beta\beta$ di *metil-n-etil-αmetilenindolina.*

$$\begin{array}{ccc} & (CH_3)_2 & \\ & C & \\ / & & \backslash \\ C_6H_4 & & C = CH_2 \\ \backslash & & / \\ & N & \\ & C_2H_5 & \end{array}$$

PARTE SPERIMENTALE

Azione del joduro di etile sulla $\beta\beta\alpha$trimetilindolenina.

Gr. 2 di base chiusi in tubo con un lieve eccesso di jodure di etile, vennero scaldati a bagno maria per circa un'ora.

Il prodotto risultante è una massa cristallina bruna per iodio; essa, dopo eliminato l'eccesso di joduro di etile, fu cristallizzata ripetutamente dall'alcool assoluto. Si ottiene così sotto forma di scagliette incolore fusibili con decomposizione a 219°.

Analisi:

calcolato per $C_{13}H_{18}NI$	trovato I	trovato II
C 49,52	—	49,86
H 5,71	—	6,24
N 4,44	4,67	—

L'analisi II venne eseguita sul campione che si era alquanto alterato all'aria perdendo probabilmente acido jodidrico. Tuttavia questi numeri concordano ancora, pel jodidrato di *ββdimetil-n-etilαmetilenindolina.*

Questo jodidrato è solubile ma non eccessivamente in alcool, meno nell'etere, è solubilissimo nell'acqua. Le sue soluzioni sono però assai alterabili alla luce. Trattato con potassa mette in libertà una base che possiede in alto grado la proprietà di arrossare, è più leggiera dell'acqua, quasi inodora e si ridiscioglie completamente negli acidi diluiti.

Picrato. — La soluzione del jodidrato trattata con soluzione acquosa di acido picrico precipita un prodotto cristallino che ridisciolto in alcool si separa in pagliette, ragruppate a raggi, di color giallo chiaro, che fondono a 125°.

Benzoilderivato. — Si ottiene col metodo di Schotten e Baumann agitando la base sospesa in una soluzione di soda al 10 % e aggiungendo a porzioni circa il sestuplo del suo peso di cloruro di benzoile. Si purifica cristallizzandolo dall'alcool nel quale è poco solubile. Si presenta sotto forma di prismetti discretamente sviluppati leggermente gialli che fondono nettamente a 140°.

Analisi:

calcolato per $C_{20}H_{21}NO$	trovato
C 82,47	82,21
H 7,22	7,36

Questo derivato, come i suoi corrispondenti, è stabile al permanganato.

Le proprietà del jodidrato, del picrato e del benzoilderivato escludono completamente che la base qui descritta sia identica alla base di Piccinini [1]; infatti il jodidrato di quest'ultima fonde a 227°-228°, il picrato a 107°-108°, il benzoilderivato fonde a 102° ed è solubilissimo in alcool.

[1] Gazz. Chim. It., 28-a-190 e seguenti.

P. B.

INDICE DEL VOLUME VII, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1898 — 1° Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

B

INDICE PER MATERIE

A

B

C

ERRATA-CORRIGE

(Vol. VII, 1° sem. 1898, fascicolo 7°).

Pag. 216, riga 3 dall'alto, leggi *gr. 20 di anidride*, invece di *gr. 50 di anidride*
" " " 6 " " *gr. 50 di joduro*, invece di *gr. 20 di joduro*
" 220 " 12 " " *gr. 0,3 di prodotto*, invece di *gr. 0,6 di prodotto*.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 gennaio 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 1°

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il avoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all'autore. - *d)* Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 1° Sem. Fasc. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VI. (1892-97) Fasc. 9° e 10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-IV.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 gennaio 1898.

(*) Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 16 *gennaio* 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 2°

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il avoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 1° Sem. Fasc. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VI. (1892-97) Fasc. 9° e 10°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-IV.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 gennaio 1898.

PERSONALE ACCADEMICO

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 febbraio 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 3°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il avoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII. (1892-98) 1° Sem. Fasc. 3°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-VI. (1892-97) Fasc. 9° e 10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-IV.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 febbraio 1898.

(*) Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei· qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI — Febbraio 1898.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 febbraio 1898.

COMITATO SEGRETO

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 marzo 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 5°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII. (1892-98) 1° Sem. Fasc. 5°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 1°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-IV.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 marzo 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 marzo 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 6°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII. (1892-98) 1° Sem. Fasc. 6°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 1°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-IV.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 marzo 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 *aprile* 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 7°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 1° Sem. Fasc. 7°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 1°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-IV.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 aprile 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

COMITATO SEGRETO

(*) Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 aprile 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 8°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 1° Sem. Fasc. 8°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 1°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-IV.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 aprile 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ERRATA-CORRIGE

(Vol. VII, 1° sem. 1898, fascicolo 7°).

Pag. 216, riga 3 dall'alto, leggi *gr. 20 di anidride*, invece di *gr. 50 di anidride*
» » » 6 » » *gr. 50 di joduro*, invece di *gr. 20 di joduro*
» 220 » 12 » » *gr. 0,3 di prodotto*, invece di *gr. 0,6 di prodotto*

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° maggio 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 9°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII. (1892-98) 1° Sem. Fasc. 9°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 2°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-IV.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° maggio 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 *maggio* 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 10°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all' autore. - *d)* Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 1° Sem. Fasc. 10°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 2°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-IV.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 maggio 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 11 giugno 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 11°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII. (1892-98) 1º Sem. Fasc. 11º.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 4º.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-IV.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.º — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell' 11 giugno 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 giugno 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 12°
e Indice del volume.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all' autore. - *d)* Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 giugno 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI